ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. С. Тоноян, Н. С. Мелкумян

Антиплоская контактная задача для упругого составного полупространства с внутренним вертикальным конечным разрезом

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 1/V 1997)

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругого составного полупространства ($x\geq 0$, $-\infty<y<\infty$, $-\infty<z<\infty$) с внутренним вертикальным конечным разрезом вдоль линии раздела материалов ($a<x<d$, $-\infty<z<\infty$). Полупространство состоит из двух однородных и изотропных четверть-пространств (правое $x\geq 0$, $y>0$, $-\infty<z<\infty$ и левое $x\geq 0$, $y>0$, $-\infty<z<\infty$) с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полупространства. К границе полупространства по обе стороны разреза прикреплены два несимметричных штампа конечных размеров (соответственно $/c_1-b_1/$ и $/c_2-b_2/$ с основанием произвольной гладкой формы). Принимается, что на штампах и на берегах разреза действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации. Для простоты принимается также, что граница полупространства вне штампов свободна от внешних усилий. На линии раздела материалов вне разреза заданы условия полного контакта.

Решение поставленной задачи математически приводится к решению гармонического уравнения ([1]), соответственно для правого (i=1) и левого ((i=2) четверть-пространства, при следующих граничных условиях:

$$
\begin{gathered}
U_z^{(i)}(0,y)=\delta_i\ \left(b_i\leq /y/\leq c_i\right),\ \tau_{zy}^{(i)}(x,o)=f_i(x)\ (a<x<d),\\
\tau_{zx}^{(i)}(o,y)=0\ \left(o\leq /y/\leq b_i\right)\left(c_i</y/<\infty\right)\ i=1,2
\end{gathered}
\tag{1}
$$

и условиях полного контакта:

$$
\tau_{zy}^{(1)}(x,o)=\tau_{zy}^{(2)}(x,o),\ U_z^{(1)}(x,o)=U_z^{(21)}(x,o)\left(0<x<a,d<x<\infty\right)
\tag{2}
$$

Решение задачи ищем в виде сумм интегралов Фурье:

$$U_z^{(i)}(x,y)=(-1)^{i+1}\int_0^\infty A^{(i)}(\alpha)e^{-\alpha x}\sin\alpha y d\alpha+\int_0^\infty C^{(i)}(\beta)e^{(-1)^i\beta y}\cos\beta x d\beta \quad (i=1,2). \tag{3}$$

Здесь $A^{(i)}(\alpha)$ и $C^{(i)}(\beta)$ — неизвестные функции интегрирования, подлежащие определению из граничных условий задачи. Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем следующую систему "тройных" интегральных уравнений и интегральных соотношений:

$$\begin{cases}\int_0^\infty \alpha A^{(1)}(\alpha)\sin\alpha y d\alpha=0 & (0<y<b_1)\\ \int_0^\infty A^{(1)}(\alpha)\sin\alpha y d\alpha=F_1(y) & (b_1\le y\le c_1);\\ \int_0^\infty \alpha A^{(1)}(\alpha)\sin\alpha y d\alpha=0 & (c_1<y<\infty)\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\int_0^\infty \alpha A^{(2)}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha=0 & (0<y_1<b_2)\\ \int_0^\infty A^{(2)}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha=F_2(y_1) & (b_2\le y_1\le c_2);\\ \int_0^\infty \alpha A^{(2)}(\alpha)\sin\alpha y_1 d\alpha=0 & (c_2<y_1<\infty)\end{cases} \tag{5}$$

$$G_1\int_0^\infty \alpha A^{(1)}(\alpha)e^{-\alpha x}d\alpha-G_1\int_0^\infty \beta C^{(1)}(\beta)\cos\beta x d\beta=f_1(x) \quad (a<x<d);$$

$$-G_2\int_0^\infty \alpha A^{(1)}(\alpha)e^{-\alpha x}d\alpha+G_2\int_0^\infty \beta C^{(2)}(\beta)\cos\beta x d\beta=f_2(x) \quad (a<x<d), \tag{6}$$

где $y_1=-y$, $F_1(y)=\delta_1-\int_0^\infty C^{(1)}(\beta)e^{-\beta y}d\beta$, $F_2(y_1)=\delta_2-\int_0^\infty C^{(2)}(\beta)e^{-\beta y_1}d\beta$, (7)

G_i — модуль упругости материалов при сдвиге.

Из (6) можно получить:

$$\int_0^\infty \beta\left[G_1C^{(1)}(\beta)+G_2C^{(2)}(\beta)\right]\cos\beta x d\beta=$$

$$= f(x) + \int_0^\infty \alpha\left[G_1 A^{(1)}(\alpha) + G_2 A^{(2)}(\alpha)\right] e^{-\alpha x} d\alpha \quad (a < x < d), \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \beta\left[C^{(1)}(\beta) + C^{(2)}(\beta)\right] \cos \beta x d\beta = f^*(x) + \int_0^\infty \alpha\left[A^{(1)}(\alpha) + A^{(2)}(\alpha)\right] e^{-\alpha x} d\alpha \ (a < x < d), \tag{9}$$

где
$$f(x) = f_2(x) - f_1(x); \ f(x) = \left(\frac{1}{G_1} f_1(x) + \frac{1}{G_2} f_2(x)\right). \tag{10}$$

Удовлетворяя условиям полного контакта (2) имеем:

$$\int_0^\infty \beta\left[G_1 C^{(1)}(\beta) + G_2 C^{(2)}(\beta)\right] \cos \beta x d\beta =$$

$$\int_0^\infty \alpha\left[G_1 A^{(1)}(\alpha) + G_2 A^{(2)}(\alpha)\right] e^{-\alpha x} d\alpha \ \left(0 < x < a, \ d < x < \infty\right), \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \left[C^{(1)}(\beta) + C^{(2)}(\beta)\right] \cos \beta x d\beta = 0 \ \left(0 < x < a, \ d < x < \infty\right). \tag{12}$$

Используя формулы обращений для преобразования Фурье из (8) и (11), получаем:

$$G_1 C^{(1)}(\beta) + G_2 C^{(2)}(\beta) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta} \int_a^d f(x) \cos \beta x d\beta + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[G_1 A^{(1)}(\alpha) + G_2 A^{(2)}(\alpha)\right] d\alpha. \tag{13}$$

а из (9) и (13) получаем следующие "тройные" интегральные уравнения:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \left[C^{(1)}(\beta) - C^{(2)}(\beta)\right] \cos \beta x d\beta = 0 \quad 0 < x \le a \\ \int_0^\infty \beta\left[C^{(1)}(\beta) - C^{(2)}(\beta)\right] \cos \beta x d\beta = f^*(x) + \int_0^\infty \alpha\left[A^{(1)}(\alpha) - A^{(2)}(\alpha)\right] e^{-\alpha x} d\alpha; \ a < x < d \\ \int_0^\infty \left[C^{(1)}(\beta) - C^{(2)}(\beta)\right] \cos \beta x d\beta = 0 \quad d \le x < \infty \end{cases} \tag{14}$$

Для решения (4) и (5) неизвестные функции ищем в виде (2)

$$\alpha A^{(1)}(\alpha) = \mathbf{B}(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty A_n J_{2n+1}(c_1 \alpha); \ \alpha A^{(2)}(\alpha) = D\ (\alpha) = \sum_{m=0}^\infty A_m J_{2m+1}(c_2 \alpha). \tag{15}$$

Здесь: $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом, A_n и A_m — неизвестные пока коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя (15) в (4) и (5), изменяя порядок интегрирования и суммирования, используя значение интеграла Вебер-Шефхейтлина ([3]), имеем:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \dfrac{\sin\left[(2n+1)\arcsin\dfrac{y}{c_1}\right]}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} = 0 & 0 < y < b_1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \dfrac{1}{2n+1} \sin\left[(2n+1)\arcsin\dfrac{y}{c_1}\right] = F_1(y) & b_1 < y \le c_1 \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \dfrac{\sin\left[(2m+1)\arcsin\dfrac{y_1}{c_2}\right]}{\sqrt{c_2^2 - y_1^2}} = 0 & 0 < y_1 < b_2 \\ \sum_{m=0}^{\infty} A_m \dfrac{1}{2m+1} \sin\left[(2m+1)\arcsin\dfrac{y_1}{c_2}\right] = F_2(y_1) & b_2 < y_1 \le c_2 . \end{cases} \tag{17}$$

Обозначим $y = c_1 \cos\dfrac{\theta}{2}$; $b_1 = c_1 \cos\dfrac{\lambda}{2}$; $y_1 = c_2 \cos\dfrac{\theta_1}{2}$; $b_2 = c_2 \cos\dfrac{\lambda_1}{2}$;

$$(2n+1)^{-1}(-1)^n A_n = A_n^{**},\ (2m+1)^{-1}(-1)^m A_m = A_m^{**}. \tag{18}$$

Тогда (16) и (17) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta = F_1\left(c_1\cos\dfrac{\theta}{2}\right) & 0 < \theta < \lambda \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\dfrac{1}{2}\right) A_n^* \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta = 0 & \lambda < \theta < \pi, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \cos\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\theta_1 = F_2\left(c_2\cos\dfrac{\theta_1}{2}\right) & 0 < \theta_1 < \lambda_1 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left(m+\dfrac{1}{2}\right) A_m^* \cos\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\theta_1 = 0 & \lambda_1 < \theta_1 < \pi. \end{cases} \tag{20}$$

Используя результаты ([4]), из (19) и (20) соответственно получаем:

$$A_n^* = \frac{2n+1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\lambda} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi \int_0^{\varphi} \frac{F_1\left(c_1\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} d\theta,$$

$$A_m^* = \frac{2m+1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\lambda_1} P_m(\cos\varphi_1)\sin\varphi_1 d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1} \frac{F_2\left(c_2\cos\dfrac{\theta_1}{2}\right)}{\sqrt{\cos\theta_1 - \cos\varphi_1}} d\theta_1, \tag{21}$$

где $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра.

Для решения (14) неизвестные функции ищем в виде ([5]):

$$\beta\left[C^1(\beta)-C^2(\beta)\right]=\sum_{q=0}^{\infty}C_q J_{2q+1}(\beta d). \tag{22}$$

Здесь C_q — неизвестные пока коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (22) в (14), изменяя порядок интегрирования и суммирования, используя значение интеграла Вебер-Шефхейтлина ([3]), получаем:

$$\begin{cases}\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_q\dfrac{1}{2q+1}\cos\left[(2q+1)\arcsin\dfrac{x}{d}\right]=0 & (0<x\le a)\\ \sum\limits_{q=0}^{\infty}C_q\dfrac{\cos\left[(2q+1)\arcsin\dfrac{x}{d}\right]}{\sqrt{d^2-x^2}}=F_3(x) & (a<x\le d)\end{cases} \tag{23}$$

где
$$F_3(x)=f^*(x)+\int_0^{\infty}\alpha\left[A^{(1)}_{(\alpha)}-A^{(2)}_{(\alpha)}\right]e^{-\alpha x}d\alpha. \tag{24}$$

обозначим $x=d\cos\dfrac{\theta_2}{2};\ a=d\cos\dfrac{\lambda_2}{2};(2q+1)^{-1}(-1)^q C_q=C_q^*.$ (25)

Тогда (23) приводится к виду:

$$\begin{aligned}&\sum_{q=0}^{\infty}(2q+1)C_q^*\sin\frac{2q+1}{2}\theta_2=F_3^*(\theta_2) \quad 0<\theta_2<\lambda_2\\ &\sum_{q=0}^{\infty}C_q^*\sin\frac{2q+1}{2}\theta_2=0 \qquad \lambda_2<\theta_2<\pi,\end{aligned} \tag{26}$$

где
$$F_3^{**}(\theta_2)=d\sin\frac{\theta_2}{2}F_3\left(d\cos\frac{\theta_2}{2}\right). \tag{27}$$

Решение (26) по результатам ([4]) имеет вид:

$$C_q^*=\sin\frac{2q+1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\lambda_2}P_q(\cos\varphi_2)\sin\varphi_2 d\varphi_2\int_0^{\varphi_2}\frac{F(\theta_2)}{\sqrt{\cos\theta_2-\cos\varphi_2}}d\theta_2, \tag{28}$$

где
$$F(\theta_2)=-2\int_0^{\varphi_2}F_3^*(\theta_2)d\theta_2+C;\ C=\sum_{q=0}^{\infty}Cq^{**}. \tag{29}$$

Имея в виду (21), (18), (15), (7) и (29), (25), (22), (13), исключая $C^{(1)}(\beta)$ и $C^{(2)}(\beta)$ из (21), для определения $B(\alpha)$ и $D(\alpha)$ получаем следующую систему интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$\begin{cases} B(\alpha) = \Omega_1(\alpha) + \int\limits_0^\infty K_1(\alpha,\mu)B(\mu)d\mu \int\limits_0^\infty K_2(\alpha,\mu)D(\mu)d\mu \\ D(\alpha) = \Omega_2(\alpha) + \int\limits_0^\infty K_3(d,\mu)B(\mu)d\mu \int\limits_0^\infty K_4(\alpha,\mu)D(\mu)d\mu, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$\Omega_1(\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(2n+1)^2 J_{2n+1}^{(c_1\alpha)}\int\limits_0^\lambda P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^\varphi\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\times$$
$$\times\left\{\delta_1 - \int\limits_0^\infty\left[\psi_2(\beta)+\frac{G_2}{G_2+G_1}\psi_1(\beta)\right]e^{-c_1\beta\cos\frac{\theta}{2}}d\beta\right\}d\theta, \tag{31}$$

$$\Omega_2(\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{m=0}^\infty(-1)^m(2m+1)^2 J_{2m+1}(c_2\alpha)\int\limits_0^{\lambda_1} P_m(\cos\varphi_1)\sin\varphi_1 d\varphi_1\int\limits_0^{\varphi_1}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta_1-\cos\varphi_1}}\times$$
$$\times\left\{\delta_2 - \int\limits_0^\infty\left[\psi_2(\beta)-\frac{G_1}{G_1+G_2}\psi_1(\beta)\right]e^{-c_2\beta\cos\frac{\theta_1}{2}}d\beta\right\}d\theta_1, \tag{32}$$

$$K_1(\alpha,\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(2n+1)^2 J_{2n+1}(c_1\alpha)\int\limits_0^\lambda P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^\varphi\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty\left\{\frac{2}{\pi}\frac{G_1}{G_1+G_2}\frac{\mu}{\beta(\mu^2+\beta^2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{d^2}{\beta}\frac{G_2}{G_1+G_2}\sum_{q=0}^\infty(-1)^q(2q+1)^2 J_{2q+1}(\beta d)\times\right.$$
$$\times\int\limits_0^{\lambda_2} P_q(\cos\varphi_2)\sin\varphi_2 d\varphi_2\int\limits_0^{\varphi_2}\frac{\mu}{\sqrt{\cos\theta_2-\cos\varphi_2}}\left[e^{-\mu d\cos\frac{\theta_2}{2}}e^{-\mu d}\right]d\theta_2 e^{-c_1\beta\cos\frac{\theta}{2}}d\beta, \tag{33}$$

$$K_2(\alpha,\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(2n+1)^2 J_{2n+1}(c\alpha)\int\limits_0^\lambda P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^\varphi\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty\left\{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{G_2}{G_1+G_2}\cdot\frac{\mu}{\beta(\mu^2+\beta^2)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{d^2}{\beta}\cdot\frac{G_2}{G_1+G_2}\sum_{q=0}^\infty(-1)^q(2q+1)^2 J_{2q+1}^{(\beta d)}\times\right. \tag{34}$$
$$\times\int\limits_0^{\lambda_1} P_q(\cos\varphi_2)\sin\varphi_2 d\varphi_2\int\limits_0^{\varphi_2}\frac{\mu}{\sqrt{\cos\theta_2-\cos\varphi_2}}\left[e^{\mu d\cos\frac{\theta_2}{2}}e^{-\mu d}\right]d\theta_2 e^{-c_1\beta\cos\frac{\theta_2}{2}}d\beta,$$

$$K_3(\alpha,\mu)=-\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n(2m+1)J_{2m+1}(c_2\alpha)\int_0^{\lambda_1}P_m(\cos\varphi_1)\sin\varphi_1 d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\frac{d\theta_1}{\sqrt{\cos\theta_1-\cos\varphi_1}}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\frac{G_1}{G_1+G_2}\frac{\mu}{\beta\left(\mu^2+\beta^2\right)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{d^2}{\beta}\frac{G_1}{G_1+G_2}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q(2q+1)^2 J_{2q+1}(\beta d)\times\right.$$

$$\times\int_0^{\varphi_2}\frac{\mu}{\sqrt{\cos\theta_2-\cos\varphi_2}}\left[e^{\mu d\cos\frac{\theta_2}{2}}e^{-\mu d}\right]d\theta_2 e^{-c_1\beta\cos\frac{\theta_2}{2}}d\beta, \tag{35}$$

$$K_4(\alpha,\mu)=-\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n(2m+1)J_{2m+1}(c_2\alpha)\int_0^{\lambda_1}P_m(\cos\varphi_1)\sin\varphi_1 d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\frac{d\theta_1}{\sqrt{\cos\theta_1-\cos\varphi_1}}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{G_2}{G_1+G_2}\cdot\frac{\mu}{\beta\left(\mu^2+\beta^2\right)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{d^2}{\beta}\cdot\frac{G_2}{G_1+G_2}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q(2q+1)^2 J_{2q+1}(\beta d)\times\right. \tag{36}$$

$$\times\int_0^{\lambda_2}P_q(\cos\varphi_2)\sin\varphi_2 d\varphi_2\int_0^{\varphi_2}\frac{\mu}{\sqrt{\cos\theta_2-\cos\varphi_2}}\left[e^{\mu d\cos\frac{\theta_2}{2}}e^{-\mu d}\right]d\theta_2 e^{-c_1\beta\cos\frac{\theta_2}{2}}d\beta.$$

Исходя из (2), (5) и асимптотического разложения функций Бесселя для больших α,

$$\lim_{a\to\infty}\Omega_1(\alpha)=0;\quad \lim_{a\to\infty}\Omega_2(\alpha)=0\quad \text{и}\quad \int_0^{\infty}K_1(\alpha,\mu)d\mu+\int_0^{\infty}K_2(\alpha,\mu)d\mu<1,$$

$$\int_0^{\infty}K_3(\alpha,\mu)d\mu+\int_0^{\infty}K_4(\alpha,\mu)d\mu<1. \tag{37}$$

Доказав разрешимость системы (30) и решая ее далее по формулам (29), (28), (27), (25), (22), (13), можно определить все искомые функции. Перемещения и напряжения по известным формулам (3) и (1), будут определены в любой точке полупространства. В частности, напряжения вне разреза на линии раздела материалов определяются по формулам:

$$\tau_{zy}^{(1)}(x0)=-\frac{G_1}{G_1+G_2}\frac{1}{\sqrt{d^2-x^2}}\sum_{q=0}^{\infty}C_q^*\cos\left[(2q+1)\arcsin\frac{x}{d}\right]-\frac{2}{\pi}\frac{G_1}{G_1+G_2},$$

$$\left\{f(x)+\int_0^{\infty}\left[G_1B(\alpha)+G_2D(\alpha)\right]e^{-\alpha x}d\alpha\right\}+G_1\int_0^{\infty}B(\alpha)e^{-\alpha x}d\alpha,\ (0<x<a),$$

$$\tau_{zy}^{(1)}(x_1 0) = -\frac{G_1}{G_1+G_2}\frac{1}{\sqrt{x^2-d^2}}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{C_q d^{(2q+1)}\sin\frac{2q+1}{2}\pi}{\left[x+\sqrt{x^2-d^2}\right]^{2q+1}} - \tag{38}$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{G_1}{G_1+G_2}\left\{f(x)+\int_0^{\infty}\left[G_1B(\alpha)+G_2D(\alpha)\right]e^{-\alpha x}d\alpha\right\}+G_1\int_0^{\infty}B(\alpha)e^{-\alpha x}d\alpha,\ (d<x<\infty),$$

Коэффициенты интенсивности напряжения, соответственно, имеют вид:

$$K_{III} = -\frac{G_1}{G_1+G_2}\sum_{q=0}^{\infty}C_q^{*}\cos\left[(2q+1)\arcsin\frac{a}{d}\right];\ K_{III} = -\frac{G_1}{G_1+G_2}\sum_{q=0}^{\infty}C_q^{*}\sin\frac{2q+1}{2}\pi. \tag{39}$$

Приравнивая значения коэффициентов интенсивности напряжений (39) к критическому значению материала ($K_{III} = K_c$) по теории хрупкого разрушения [6], получаем выражение, которое определяет распространение трещины.

Институт механики НАН Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ն. Ս. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Ներքին ուղղաձիգ վերջավոր ճեղքով առաձգական բաղադրյալ կիսատարածության համար հսկահարթ կոնտակտային խնդիր

Դիտարկված է ներքին ուղղաձիգ վերջավոր ճեղքով առաձգական բաղադրյալ կիսատարածության համար հակահարթ կոնտակտային խնդիր: Կիսատարածությունը բաղկացած է երկու տարբեր առաձգական հատկություններով համասեռ իզոտրոպ քառորդ տարածություններից: Նյութերի բաժանման գիծը ուղղահայաց է կիսատարածության եզրին և իր երկայնքով ունի ներքին վերջավոր ճեղք: Կիսատարածության եզրի վրա ճեղքի երկու կողմերում ամրացված են ոչ սիմետրիկ դասավորված կամայական հիմքերով երկու դրոշմներ: Ենթադրվում է, որ շտամպի և ճեղքի ափերի վրա ազդում են այնպիսի ուժեր, որոնք ստեղծում են հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակ: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը փնտրված է Ֆուրյեի երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով: Բավարարելով եզրային և կոնտակտային պայմաններին, խնդրի լուծումը սկզբում բերվել է «խառը» ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, իսկ հետագայում Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Ցույց է տրված այդ համակարգի լուծելիությունը: Ստացված են անալիտիկ բանաձևեր կոնտակտային լարումների և նրանց ինտենսիվության գործակիցների համար:

ЛИТЕРАТУРА –ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В.Новацкий,* Теория упругости, М., Мир, 1975. [2] *В.С.Тоноян,* ДАН Арм.ССР, т.37, №3, с.121-124 (1963). [3] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Наука, 1971. [4] *А.А.Баблоян,* ДАН Арм.ССР, т.39, №3, с.149-157 (1964). [5] *В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян,* ДАН Арм.ССР, т.64, №2, с.122-127 (1977). [6] *Г.П.Черепанов,* Механика хрупкого разрушения, М., Наука, 1974.