ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик НАН Армении Б. Л. Абрамян, А. В. Саакян, А. В. Гаспарян

Осесимметричная контактная задача для жесткого круглого фундамента, лежащего на двухслойном упругом полупространстве со сцеплением

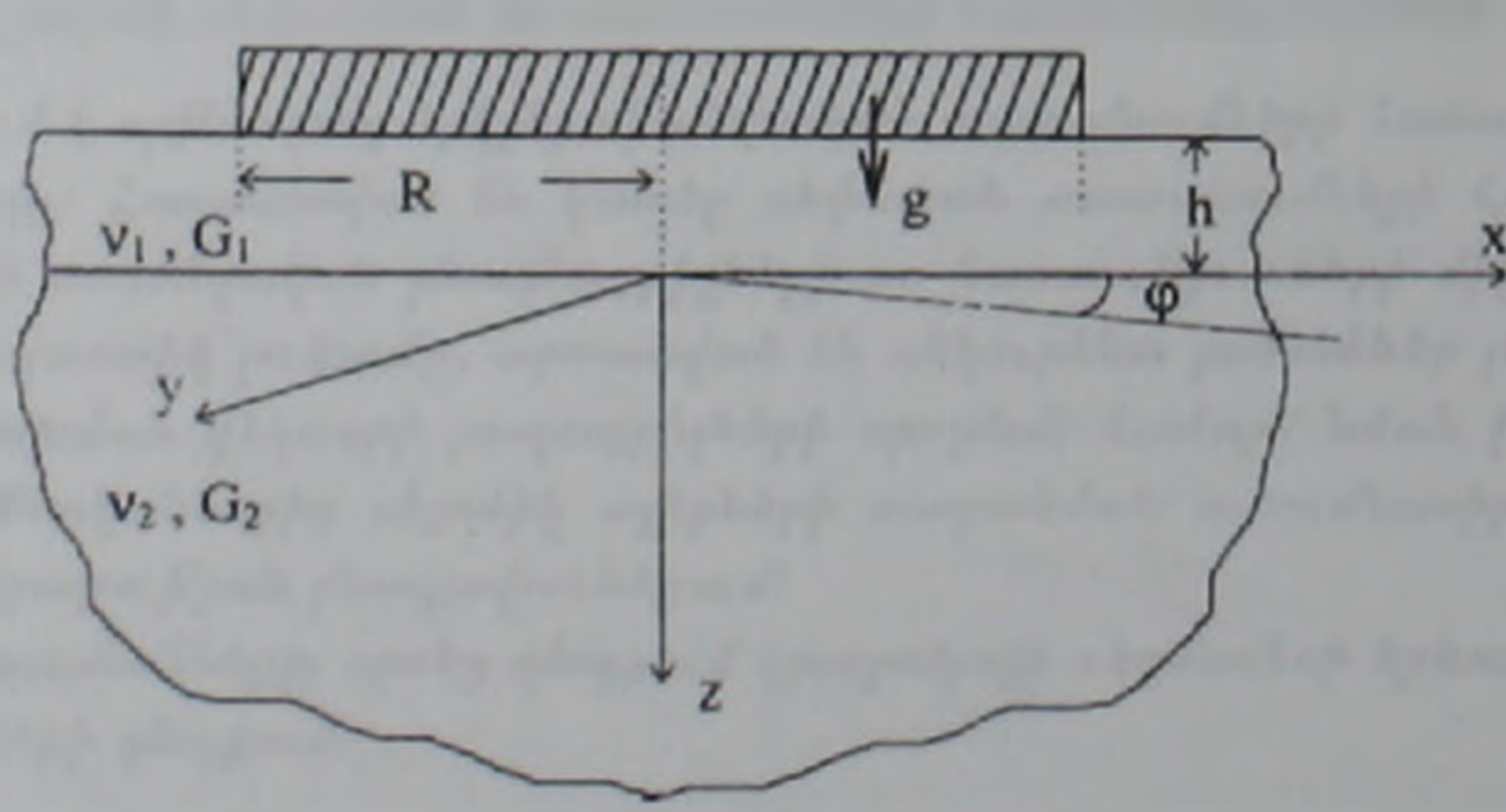
(Представлено 22/IV 1997)

Рассматривается контактная задача о вдавливании жесткого, круглого в плане фундамента в упругое двухслойное полупространство под действием собственного веса (рисунок). Предполагается, что фундамент сцеплен с основанием, тогда граничные условия и условия на поверхности соединения слоев составного полупространства запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} u_z^{(1)}(r,-h) &= \varepsilon_h \\ u_r^{(1)}(r,-h) &= 0 \end{aligned}\right\} r \le R, \quad \sigma_z^{(1)}(r,-h) = \tau_{rz}^{(1)}(r,-h) = 0 \quad r > 0\,, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u_z^{(1)}(r,h) = u_z^{(2)}(r,0), \quad \sigma_z^{(1)}(r,0) = \sigma_z^{(2)}(r,0) \\ u_r^{(1)}(r,h) = u_z^{(2)}(r,0), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r,0) = \tau_{rz}^{(2)}(r,0) \end{aligned}\right\} \quad (0 \le r \le \infty)\,, \tag{2}$$

где ε_h — подлежащая определению осадка жесткого фундамента. Индексами "1" и "2" отмечены величины, относящиеся, соответственно, к верхнему и нижнему слоям полупространства.



Для определения неизвестной осадки ε_h используется условие равновесия фундамента

$$\int_0^R r\sigma_z^{(1)}(r,-h)dr = -\frac{P}{2\pi}, \tag{3}$$

где P — вес фундамента.

Бигармоническую функцию А.Лява представляем в виде

$$\varphi(r,z) = \begin{cases} \varphi_1(r,z) & (-h \le z \le 0,\ r \ge 0) \\ \varphi_2(r,z) & (0 \le z < \infty,\ r \ge 0), \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(r,z) &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\Big[A^{(1)}(\lambda)sh(\lambda z) + B^{(1)}(\lambda)ch(\lambda z) + \\ &+ C^{(1)}(\lambda)\lambda z sh(\lambda z) + D^{(1)}(\lambda)\lambda z ch(\lambda z)d\lambda\Big] \\ \varphi_2(r,z) &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}\Big[A^{(2)}(\lambda) + \lambda z C^2(\lambda)\Big]d\lambda \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Выражая перемещения и напряжения через функции (5) и удовлетворяя условиям (1) и (2), решение задачи приведем к соотношениям

$$\begin{aligned} &2(1-2\nu_1)C^{(1)}(\lambda) - B^{(1)}(\lambda) = -m_0\Big[2(1-2\nu_2)C^{(2)}(\lambda) + A^{(2)}(\lambda)\Big], \\ &A^{(1)}(\lambda) + D^{(1)}(\lambda) = -m_0\Big[A^{(2)}(\lambda) - C^{(2)}(\lambda)\Big],\ m_0 = \frac{G_1}{G_2}, \\ &(1-2\nu_1)D^{(1)}(\lambda) - A^{(1)}(\lambda) = A^{(2)}(\lambda) + (1-2\nu_2)C^{(2)}(\lambda), \\ &B^{(1)}(\lambda) + 2\nu_1 C^{(1)}(\lambda) = A^{(2)}(\lambda) - 2\nu_2 C^{(2)}(\lambda), \end{aligned} \tag{6}$$

а также к системе "парных" интегральных уравнений, содержащих бесселевые функции от действительного аргумента первого рода $J_i(\lambda r)$ $i = 0,1$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \lambda^2 J_0(\lambda r)\Big[A^{(2)}(\lambda)s_{11}(\lambda,h) + C^{(2)}(\lambda)s_{12}(\lambda,h)\Big]d\lambda = -4(1-\nu_1)G_1\varepsilon_h \\ &\int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda r)\Big[A^{(2)}(\lambda)n_{11}(\lambda,h) + C^{(2)}(\lambda)n_{12}(\lambda,h)\Big]d\lambda = 0 \end{aligned}\right\} (r \le R)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \lambda^3 J_0(\lambda r)\left[A^{(2)}(\lambda)s_{21}(\lambda,h)+C^{(2)}(\lambda)s_{22}(\lambda,h)\right]d\lambda=0\\&\int_0^\infty \lambda^3 J_1(\lambda r)\left[A^{(2)}(\lambda)n_{21}(\lambda,h)+C^{(2)}(\lambda)n_{22}(\lambda,h)\right]d\lambda=0\end{aligned}\right\}\ (r>R), \qquad (7)$$

где $s_{ij}(\lambda,h)$ и $n_{ij}(\lambda,h)$ — обозначения, которые содержат физические и геометрические параметры упругих слоев полупространства и гиперболические функции, заданные в верхнем слое полупространства.

Для решения системы "парных" уравнений (7) используются новые обозначения:

$$\sigma_z^{(i)}(r,-h)=\begin{cases}0 & r>R\\ \sigma(r,h) & r<R,\end{cases}\qquad \tau_{rz}^{(i)}(r,-h)=\begin{cases}0 & r>R\\ \tau(r,h) & r<R,\end{cases} \qquad (8)$$

где $\sigma(r,h)$ и $\tau(r,h)$ — контактные напряжения под фундаментом.

С учетом обозначений (8) первые два уравнения системы (7) приводятся к виду

$$\begin{aligned}&\int_0^R t\sigma(t,h)dt\int_0^\infty L_{11}(\lambda,h)J_0(\lambda r)J_0(\lambda t)d\lambda+\\&+\int_0^R t\tau(t,h)dt\int_0^\infty L_{12}(\lambda,h)J_0(\lambda r)J_1(\lambda t)d\lambda=2G_1\varepsilon_h \qquad (0\le r\le R),\\&\int_0^R t\sigma(t,h)dt\int_0^\infty L_{21}(\lambda,h)J_1(\lambda r)J_0(\lambda t)d\lambda+\int_0^R t\tau(t,h)dt\int_0^\infty L_{22}(\lambda,h)J_1(\lambda r)J_1(\lambda t)d\lambda=0,\end{aligned} \qquad (9)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}&L_{11}(\lambda,h)=\frac{n_{22}(\lambda,h)s_{11}(\lambda,h)-n_{21}(\lambda,h)s_{12}(\lambda,h)}{\Delta(\lambda,h)},\\&L_{12}(\lambda,h)=\frac{s_{21}(\lambda,h)s_{12}(\lambda,h)-s_{22}(\lambda,h)s_{11}(\lambda,h)}{\Delta(\lambda,h)},\\&L_{21}(\lambda,h)=\frac{n_{22}(\lambda,h)n_{11}(\lambda,h)-n_{21}(\lambda,h)n_{12}(\lambda,h)}{\Delta(\lambda,h)},\\&L_{22}(\lambda,h)=\frac{s_{21}(\lambda,h)n_{12}(\lambda,h)-s_{22}(\lambda,h)n_{11}(\lambda,h)}{\Delta(\lambda,h)},\\&\Delta(\lambda,h)=s_{21}(\lambda,h)n_{22}(\lambda,h)-s_{22}(\lambda,h)n_{21}(\lambda,h).\end{aligned} \qquad (10)$$

Остальные два уравнения системы (7) удовлетворяются тождественно. Используя известные представления

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda t)d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{\min(r,t)} \frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)(t^2-x^2)}}$$

и (11)

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r)J_1(\lambda t)d\lambda = \frac{2}{\pi rt}\int_0^{\min(r,t)} \frac{x^2dx}{\sqrt{(r^2-x^2)(t^2-x^2)}},$$

систему интегральных уравнений первого рода (9) приведем к виду ([1])

$$\sigma(t,h) = f(t,h) + \int_0^R \sigma(z,h)K_{11}(z,t,h)dz + \int_0^R \tau(z,h)K_{12}(z,t,h)dz \quad (0<t<R),$$

$$\tau(t,h) = \int_0^R \sigma(z,h)K_{21}(z,t,h)dz + \int_0^R \tau(z,h)K_{22}(z,t,h)dz. \tag{12}$$

Здесь ядра системы интегральных уравнений второго рода (12) также выражаются при помощи коэффициентов $L_{ij}(\lambda,h)$. А свободный член $f(t,h)$ системы (12) имеет значение

$$f(t,h) = -\frac{4G_1\varepsilon_h}{\pi\sqrt{R^2-t^2}}. \tag{13}$$

Поскольку осадка жесткого фундамента в упругом составном полупространстве также является неизвестной величиной и подлежит определению, то, используя условие равновесия фундамента (3) и первое уравнение из (12), вначале выражаем ε_h через контактные напряжения под фундаментом

$$\varepsilon_h = \frac{P}{8G_1R} + \frac{1}{2G_1R}\int_0^R t\sigma(t,h)dt\int_0^\infty [1-L_{11}(\lambda,h)]J_0(\lambda,t)\sin(\lambda,R)\frac{d\lambda}{\lambda} -$$

$$-\frac{1}{2G_1R}\int_0^R t\tau(t,h)dt\int_0^\infty L_{12}(\lambda,h)J_1(\lambda,t)\sin(\lambda,R)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{14}$$

Далее, учитывая это значение для осадки жесткого фундамента, первое уравнение системы (12) представляем в виде

$$\sigma(t,h) = F(t) + \int_0^R \sigma(z,h)K_{11}^*(z,t,h)dz + \int_0^R \tau(z,h)K_{12}^*(z,t,h)dz \quad (0<t<R), \tag{15}$$

где

$$F(t) = -\frac{P}{2\pi R\sqrt{R^2-t^2}}. \tag{16}$$

В (15) ядра K_{11}^{*} и K_{12}^{*} также выражаются при помощи коэффициентов $L_{ij}(\lambda, h)$. Полученная система уравнений позволяет определить контактные напряжения $\sigma(t, h)$ и $\tau(t, h)$, а использованием этих найденных значений контактных напряжений из (14) определяется осадка фундамента.

Последняя система интегральных уравнений интегрируема. Подобные системы, возникающие при исследовании статических и динамических задач теории упругости, изучали многие ученые. Этой проблеме посвящены работы В.А.Бабешко [2-5], а также монография И.И.Воровича и В.А.Бабешко [6].

В частном случае, когда вместо двухслойного полупространства под фундаментом имеется однородное упругое полупространство, положив в выражениях $L_{ij}(\lambda, h)$ $v_1 = v_2 = v$, $G_1 = G_2 = G$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ и h=0, получим

$$L_{12}(\lambda,0) = L_{21}(\lambda,0) = 1 - L_{11}(\lambda,0) = 1 - L_{22}(\lambda,0) = -(1-2\upsilon).$$

Далее, пользуясь значениями интегралов

$$\int_0^\infty J_0(\lambda, z)\sin(\lambda, R)\frac{d\lambda}{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & z \le R \\ \arcsin\dfrac{R}{z} & z \ge R \end{cases},$$

$$\int_0^\infty J_1(\lambda, z)\sin(\lambda, R)\frac{d\lambda}{\lambda} = \begin{cases} R - \sqrt{R^2 - z^2} & z \le R \\ \sin\left(\arcsin\dfrac{R}{z}\right) & z \ge R \end{cases}$$

и условием равновесия фундамента (3), из (14) получим

$$\varepsilon_0 = \frac{P(1-v)}{4GR} + \frac{1-2v}{2GR}\int_0^R \tau(z,0)\left[R - \sqrt{R^2 - z^2}\right]dz. \tag{17}$$

Подобный выражению (17) результат для дополнительной осадки жесткого фундамента от действия сосредоточенной вертикальной нагрузки, приложенной на конечном расстоянии от центра фундамента, получен в работе [7].

Институт механики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ.
Ա.Վ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Ա. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Երկշերտանի առաձգական կիսատարածության վրա ամրակցումով զետեղված կլոր կոշտ ֆունդամենտի համար առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիր

Ուսումնասիրվում է երկշերտանի առաձգական կիսատարածության մակերևույթի վրա ամրակցումով զետեղված կլոր կոշտ ֆունդամենտի ազդեցությունը կիսատարածության վրա:

Կշռելի կլոր Հիմքով. կոշտ ֆունդամենտի նստվածքի որոշման Համար ստացվել է բանաձև որտեղ նստվածքն արտաՀայտվել է ֆունդամենտի և առաձգական կիսատարածության բաղադրիչ շերտերի երկրաչափական և ֆիզիկական Հատկությունների պարամետրերը պարունակող արտաՀայտությունով, ընդ որում նստվածքը կախված է նաև ֆունդամենտի տակ առաջացած կոնտակտային լարումների մեծություններից:

Կոնտակտային լարումները որոշելու Համար ստացվել է երկրորդ սեռի ինտեգրալ Հավասարումների Համակարգ:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б.Л.Абрамян, А.В.Гаспарян.* Изв. НАН Армении. Механика, т.47, №3-4, с.10-12 (1994). [2] *В.А.Бабешко,* ПММ, т.33, вып.1, с.52-60 (1969). [3] *В.А.Бабешко,* ДАН СССР, т.210, вып.6, с.1310-1313 (1973). [4] *В.А.Бабешко,* ДАН СССР, т.220, вып.6, с.1293-1296 (1975). [5] *В.А.Бабешко,* ДАН СССР, т.217, вып.4, с.777-780 (1974). [6] *В.А.Бабешко, И.И.Ворович,* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей, М., Наука, 1979. [7] *Б.Л.Абрамян, А.В.Саакян, А.В.Гаспарян,* ДНАН Армении, т.96, №1, с.16-19 (1996).