ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Л. С. Саркисян

О частотах собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 20/III 1997)

Рассматривается вопрос определения частот собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы. Найдена связь между частотами собственных колебаний, упругими характеристиками и толщинами слоев. Подобная проблема возникает, в частности, в сейсмостойком строительстве.

Выведены условия, при которых будет отсутствовать резонанс при сейсмических воздействиях. Ранее в работе ([1]) для однослойной полосы была найдена связь между частотами собственных колебаний полосы и скоростями распространения сейсмических сдвиговых и продольных волн. В данной работе показано, что нет подобной явной связи, однако в двухслойной полосе также возникают сдвиговые и продольные колебания.

1. Имеется двухслойная полоса $\Omega = \{(x, y): x \in [0, l], -h_2 \le y \le h_1, \max(h_1, h_2) << l\}$ из ортотропных слоев.

Требуется определить решение однородных динамических уравнений плоской задачи теории упругости ([2]) при граничных условиях

$$u_x^I = 0,\ u_y^I = 0 \text{ при } y = h_1,$$
$$u_x^{II} = 0,\ u_y^{II} = 0 \text{ при } y = -h_2 \tag{1.1}$$

и условиях полного контакта слоев при $y=0$

$$u_x^I = u_x^{II},\ u_y^I = u_y^{II},\ \sigma_{xy}^I = \sigma_{xy}^{II},\ \sigma_{yy}^I = \sigma_{yy}^{II}. \tag{1.2}$$

Начальные условия и условия на торцах ($x=0$, $x=l$) полосы пока не будем конкретизировать, поскольку, как убедимся ниже, они для данного класса задач не влияют на частоты собственных колебаний.

Искомые величины представим в виде

$$\sigma_{xx}^{(j)} = \sigma_{11}^{(j)}(x,y)e^{i\omega t}, \quad \sigma_{yy}^{(j)} = \sigma_{22}^{(j)}(x,y)e^{i\omega t}, \sigma_{xy}^{(j)} = \sigma_{12}^{(j)}(x,y)e^{i\omega t},$$
$$u_x^{(j)} = \bar{u}_x^{(j)}(x,y)e^{i\omega t}, u_y^{(j)} = \bar{u}_y^{(j)}(x,y)e^{i\omega t}, \quad j = I, II \tag{1.3}$$

и перейдем к безразмерным переменным $\xi = x/l$, $\varsigma = y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u^{(j)} = \bar{u}_x^{(j)}/l$, $v^{(j)} = \bar{u}_y^{(j)}/l$.

В результате получим систему

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(j)}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}^{(j)}}{\partial\varsigma} = -\varepsilon^{-2}\omega_*^2\rho^{(j)}u^{(j)}, \ \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}^{(j)}}{\partial\varsigma} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(j)}}{\partial\xi} = -\varepsilon^{-2}\omega_*^2\rho^{(j)}v^{(j)},$$
$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial\xi} = a_{11}^{(j)}\sigma_{11}^{(j)} + a_{12}^{(j)}\sigma_{22}^{(j)}, \ \varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(j)}}{\partial\varsigma} = a_{12}^{(j)}\sigma_{11}^{(j)} + a_{22}^{(j)}\sigma_{22}^{(j)}, \tag{1.4}$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(j)}}{\partial\varsigma} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial\xi} = a_{66}^{(j)}\sigma_{12}^{(j)}, \ \omega_*^2 = h^2\omega^2,$$

и условия:

$$u^I = 0, v^I = 0 \quad \text{при } \varsigma = \varsigma_1,$$
$$u^{II} = 0, v^{II} = 0 \quad \text{при } \varsigma = -\varsigma_2, \tag{1.5}$$
$$u^I = u^{II}, v^I = v^{II}, \ \sigma_{22}^I = \sigma_{22}^{II}, \ \sigma_{12}^I = \sigma_{12}^{II} \quad \text{при } \varsigma = 0,$$

где $\varsigma_1 = h_1/h$, $\varsigma_2 = h_2/h$, $\omega_*^2 = h^2\omega^2$, $h = \max(h_1, h_2)$.

Полученная краевая задача (1.4), (1.5) представляет собой сингулярно возмущенную малым параметром ε задачу на собственные значения.

2. Чтобы решить поставленную сингулярно возмущенную задачу, применим метод асимптотических разложений и решение системы (1.4) отыщем в виде [3-6]

$$Q_{ik}^{(j)} = \varepsilon^{\kappa_{ik}+s}Q_{ik,s}^{(j)}, \ s = \overline{0,N}, \tag{2.1}$$

где Q_{ik} — любая из искомых величин системы (1.4). $s = \overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений N.

После подстановки (2.1) в (1.4) получим непротиворечивую систему относительно $Q_{ik,s}^{(j)}$, если $\kappa_{ik} = -1$ для напряжений, $\kappa_{ik} = 0$ для перемещений.

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(j,s)}}{\partial\varsigma}=-\omega_*^2\rho^{(j)}u^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial\sigma_{22}^{(j,s)}}{\partial\varsigma}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}=-\omega_*^2\rho^{(j)}v^{(j,s)},\quad \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(j)}\sigma_{11}^{(j,s)}+a_{12}^{(j)}\sigma_{22}^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial\varsigma}=a_{12}^{(j)}\sigma_{11}^{(j,s)}+a_{22}^{(j)}\sigma_{22}^{(j,s)},\quad \frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial\varsigma}+\frac{\partial v^{(j,s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}^{(j)}\sigma_{22}^{(j,s)}. \tag{2.2}$$

Из системы (2.2) все величины можно выразить через функции $u^{(j,s)}, v^{(j,s)}$, которые в свою очередь определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 u^{(j,s)}}{\partial\varsigma^2}+a_{66}^{(j)}\omega_*^2\rho^{(j)}u^{(j,s)}=-\frac{\partial^2 v^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\varsigma}-a_{66}^{(j)}\frac{\partial\sigma_{11}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 v^{(j,s)}}{\partial\varsigma^2}+A_{11}^{(j)}\omega_*^2\rho^{(j)}v^{(j,s)}=-A_{11}^{(j)}\frac{\partial\sigma_{12}^{(j,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{a_{12}^{(j)}}{a_{11}^{(j)}}\cdot\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\varsigma}. \tag{2.4}$$

При $s=0$ уравнения (2.3) и (2.4) однородны и независимы. Их решения представим в виде

$$u^{(j,0)}=u_\xi^{(j,0)}(\xi)\cdot u_0^{(j,0)}(\varsigma),\ v^{(j,0)}=v_\xi^{(j,0)}(\xi)\cdot v_0^{(j,0)}(\varsigma). \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.3) и (2.4), получим уравнения относительно $u_0^{(j,0)}(\varsigma), v_0^{(j,0)}(\varsigma)$. Решив эти уравнения, получим

$$u_0^{(j,0)}=C_1^{(j,0)}\sin\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega_*\varsigma+C_2^{(j,0)}\cos\sqrt{a_{66}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega_*\varsigma, \tag{2.6}$$

$$v_0^{(j,0)}=C_3^{(j,0)}\sin\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega_*\varsigma+C_4^{(j,0)}\cos\sqrt{A_{11}^{(j)}\rho^{(j)}}\,\omega_*\varsigma, \tag{2.7}$$

где $C_i^{(j,0)}$, $i=1,2,3,4$, $j-I,II$ — произвольные постоянные.

Удовлетворив граничным условиям (1.5), получим следующие две системы однородных уравнений:

$$\begin{aligned}&C_1^{(II,0)}\sqrt{\frac{\rho^{II}a_{66}^{I}}{\rho^{I}a_{66}^{II}}}\sin\sqrt{a_{66}^{I}\rho^{I}}\,\omega_*\varsigma_1+C_2^{(II,0)}\cos\sqrt{a_{66}^{I}\rho^{I}}\,\omega_*\varsigma_1=0,\\&-C_1^{(II,0)}\sin\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*\varsigma_2+C_2^{(II,0)}\cos\sqrt{a_{66}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*\varsigma_2=0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&C_3^{(II,0)}\sqrt{\frac{\rho^{II}A_{11}^{I}}{\rho^{I}A_{11}^{II}}}\sin\sqrt{A_{11}^{I}\rho^{I}}\,\omega_*\varsigma_1+C_4^{(II,0)}\cos\sqrt{A_{11}^{I}\rho^{I}}\,\omega_*\varsigma_1=0,\\&-C_3^{(II,0)}\sin\sqrt{A_{11}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*\varsigma_2+C_4^{(II,0)}\cos\sqrt{A_{11}^{II}\rho^{II}}\,\omega_*\varsigma_2=0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Для существования ненулевых решений необходимо, чтобы определители этих систем обращались в нуль. В результате получим трансцендентные уравнения относительно частот собственных колебаний ω_*, которые для изотропных материалов записываются:

$$\sqrt{\frac{\rho'' G''}{\rho' G'}}\sin\sqrt{\frac{\rho'}{G'}}\omega_*\varsigma_1\cdot\cos\sqrt{\frac{\rho''}{G''}}\omega_*\varsigma_2+\cos\sqrt{\frac{\rho'}{G'}}\omega_*\varsigma_1\cdot\sin\sqrt{\frac{\rho''}{G''}}\omega_*\varsigma_2=0, \quad (2.10)$$

$$\sqrt{\frac{\rho'' E''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{\rho' E'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}}\sin\sqrt{\frac{\rho'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E'}}\omega_*\varsigma_1\cdot\cos\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E''}}\omega_*\varsigma_2+$$

$$+\cos\sqrt{\frac{\rho'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E'}}\omega_*\varsigma_1\cdot\sin\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E''}}\omega_*\varsigma_2=0. \quad (2.11)$$

Таким образом, в двухслойной полосе будут возникать два типа собственных колебаний — первый с частотой, которая удовлетворяет уравнению (2.10), а второй — с частотой, соответствующей (2.11).

Уравнения (2.10) и (2.11) можно привести к следующему стандартному виду:

$$a\sin(b\omega_*)=c\sin(d\omega_*), \quad (2.12)$$

где для уравнения (2.10)

$$a=1+\sqrt{\frac{\rho'' G''}{\rho' G'}},\; b=\sqrt{\frac{\rho'}{G'}}\varsigma_1+\sqrt{\frac{\rho''}{G''}}\varsigma_2,\; c=1-\sqrt{\frac{\rho'' G''}{\rho' G'}},\; d=\sqrt{\frac{\rho'}{G'}}\varsigma_1-\sqrt{\frac{\rho''}{G''}}\varsigma_2, \quad (2.13)$$

а для уравнения (2.11)

$$a=1+\sqrt{\frac{\rho'' E''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{\rho' E'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}},\; b=\sqrt{\frac{\rho'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E'}}\varsigma_1+\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E''}}\varsigma_2,$$

$$c=1-\sqrt{\frac{\rho'' E''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{\rho' E'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}},\; d=\sqrt{\frac{\rho'\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E'}}\varsigma_1-\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^2\right]}{E''}}\varsigma_2. \quad (2.14)$$

В частном случае, когда слои имеют одинаковые толщины и упругие характеристики, уравнения (2.10) и (2.11) совпадают с уравнениями частот для ортотропного слоя, выведенного в ([1]):

$$\sin 2\sqrt{\frac{\rho}{G_{12}}}\omega_*=0,\quad \sin 2\sqrt{\frac{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_2}}\omega_*=0. \quad (2.15)$$

Из (2.15) получаются следующие частоты собственных колебаний:

$$\omega_n^{(0)} = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}}\,, \tag{2.16}$$

$$\omega_n^{(0)} = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{\frac{E_2}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}}\,, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.17}$$

где $2h$ — толщина слоя, G_{12} — модуль сдвига, $C_s = \sqrt{G_{12}/\rho}$ — скорость распространения сейсмических сдвиговых волн, а $C_p = \sqrt{E_2/\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ — скорость распространения продольных волн в пластинке.

Из уравнения (2.12) следует, что, в отличие от (2.16), (2.17), нет такой же явной связи между частотами собственных колебаний двухслойной полосы и скоростями распространения сдвиговых и продольных волн. Тем не менее, в силу (2.13), (2.14), уравнению (2.10) соответствуют частоты сдвиговых колебаний, уравнению (2.11) — частоты продольных колебаний.

В дальнейшем частоты, вычисленные из уравнения (2.10), обозначим $\omega_*^{сд}$, а частоты, соответствующие (2.11), — ω_*^{p}.

Из систем (2.8), (2.9), выразив постоянные $C_1^{(II,0)}, C_3^{(II,0)}$ через $C_2^{(II,0)}, C_4^{(II,0)}$ и подставив их значения в (2.6), (2.7), используя (2.2), (2.5), получим следующие значения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения для второго слоя:

$$u^{(II,0)} = u_\xi^{(II,0)}(\xi)\cdot C_2^{(II,0)}\left(ctg\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*^{сд}\varsigma_2\cdot\sin\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*^{сд}\varsigma + \cos\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*^{сд}\varsigma\right),$$

$$\sigma_{12}^{(II,0)} = u_\xi^{(II,0)}(\xi)\cdot C_2^{(II,0)}\sqrt{\rho^{II}G^{II}}\,\omega_*^{сд}\left(ctg\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*^{сд}\varsigma_2\cdot\cos\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*^{сд}\varsigma - \sin\sqrt{\frac{\rho^{II}}{G^{II}}}\omega_*^{сд}\varsigma\right),$$

$$v^{(II,0)} = v_\xi^{(II,0)}(\xi)\cdot C_4^{(II,0)}\left(ctg\sqrt{\frac{\rho^{II}\left[1-(\nu^{II})^2\right]}{E^{II}}}\omega_*^{p}\varsigma_2\cdot\sin\sqrt{\frac{\rho^{II}\left[1-(\nu^{II})^2\right]}{E^{II}}}\omega_*^{p}\varsigma + \right.$$

$$\left. + \cos\sqrt{\frac{\rho^{II}\left[1-(\nu^{II})^2\right]}{E^{II}}}\omega_*^{p}\varsigma\right),$$

$$\sigma_{22}^{(II,0)} = v_\xi^{(III,0)}(\xi)\cdot C_4^{(II,0)}\sqrt{\frac{\rho^{II}E^{II}}{1-(\nu^{II})^2}}\omega_*^{p}\left(ctg\sqrt{\frac{\rho^{II}\left[1-(\nu^{II})^2\right]}{E^{II}}}\omega_*^{p}\varsigma_2\times\right.$$

$$\times\cos\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^{2}\right]}{E''}}\,\omega_{*}^{p}\varsigma-\sin\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^{2}\right]}{E''}}\,\omega_{*}^{p}\varsigma\Bigg),$$

$$\sigma_{11}^{(II,0)}=\nu_{\xi}^{(II,0)}(\xi)\cdot C_{4}^{(II,0)}\sqrt{\rho''E''\left(\nu''\right)^{2}}\left(ctg\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^{2}\right]}{E''}}\,\omega_{*}^{p}\varsigma_{2}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^{2}\right]}{E''}}\,\omega_{*}^{p}\varsigma-\sin\sqrt{\frac{\rho''\left[1-\left(\nu''\right)^{2}\right]}{E''}}\,\omega_{*}^{p}\varsigma\right).$$

Аналогично записываются величины для первого слоя.

Поскольку сильным землетрясениям соответствуют периоды T порядка $10^{-2}\sim10^{2}$ с ([7]), то, используя (2.13), (2.14), можно так подобрать параметры основания и фундамента слоев, чтобы избежать резонансных явлений при сейсмическом воздействии.

Рассматривая решения системы (2.2) при $s>0$, когда $\omega=\omega_{*}^{s}$ и $\omega=\omega_{*}^{p}$, можно убедиться, что приближения $s>0$ не влияют на значения частот и не приводят к определению принципиально новых произвольных постоянных. Нетрудно убедиться также в том, что (1.3), (2.1), (2.18) и аналогичное решение для другого слоя содержат достаточное число произвольных функций для удовлетворения начальным условиям. Процедура их удовлетворения такая же, что и в ([8]).

Институт механики НАН Армении

Լ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Օրթոտրոպ երկշերտի սեփական տատանումների հաճախությունների մասին

Ուսումնասիրվում է օրթոտրոպ երկշերտի սեփական տատանումների Հաճախությունների որոշման Հարցը: Հաստատված են կապեր սեփական տատանումների Հաճախությունների և շերտերի առաձգական բնութագրիչների ու Հաստությունների միջև: Ստացված է խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը, արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման Համար: Նման խնդիրները Համարվում են Հիմնականներից սեյսմիկ ալիքների տարածման ուսումնասիրության և սեյսմակայուն շինարարության բնագավառներում:

Նշվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում կբացակայի ռեզոնանսի երևույթը սեյսմիկ ազդեցությունների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л.А.Агаловян*, в сб. "Юбилейн. научн. конф. к 60-летию ГПИ Армении", Гюмри, Высшая школа, 1994. [2] *С.Г.Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977. [3] *Л.А.Агаловян*, Межвуз. сб. "Механика", изд-во ЕГУ, вып.2 (1982). [4] *А.Б.Васильева., В.Ф.Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., Наука, 1973. [5] *А.Л.Гольденвейзер*, ПММ, т.26, вып.4 (1962). [6] *А.Х.Найфе*, Методы возмущений, М., Мир, 1976. [7] *К.Касахара*, Механика землетрясений, М., Мир, 1985. [8] *В.Л.Бажанов, И.И.Гольденблат* и др., Пластинки и оболочки из стеклопластиков, М., Высшая школа, 1970.