

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик НАН Армении Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян, А. В. Саакян

Об асимптотическом решении краевых задач для полос  
из несжимаемых материалов

(Представлено 23/1 1997)

На основе уравнений теории упругости получено асимптотически точное решение класса внутренних задач для полос из несжимаемых материалов. Выведены рекуррентные формулы для вычисления компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, когда на продольных краях заданы кинематические условия или смешанные краевые условия теории упругости, в частности, когда полоса подвергается сжатию и сдвигу.

Необходимость решения таких задач обусловлена расчетом резинометаллических сейсмоизоляторов, применяемых в сейсмостойком строительстве. Решения аналогичных задач для тел из сжимаемых материалов, полученные асимптотическим методом (1-3), неприменимы к телам из несжимаемых материалов. Найдена отличная от (1-3), принципиально новая асимптотика. Приведены примеры применения полученного решения в расчетах эластомерных сейсмоизоляторов. Подобные задачи ранее рассматривались Дж.Келли (4) на основе принятия некоторых гипотез. Полученные в работе точные решения позволяют оценить степень точности принятых Дж.Келли допущений.

1. Пусть изотропная несжимаемая полоса конечных размеров занимает область  $\Omega = \{x, z: -l \leq x \leq l, -h \leq z \leq h, h \ll l\}$ . Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы, когда на ее продольных краях заданы кинематические условия

$$u_x(z = \pm h) = u_x^{\pm}, \quad u_z(z = \pm h) = u_z^{\pm} \quad (1.1)$$

или смешанные условия

$$\sigma_{xz}(z = h) = \sigma_{xz}^+, \quad u_x(z = -h) = u_x^-, \quad u_z(z = \pm h) = u_z^{\pm}. \quad (1.2)$$

Условия, заданные на торцах, будут конкретизированы позже.

Для решения поставленных краевых задач в уравнениях плоской деформации для несжимаемого тела перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$x = l\xi, z = h\zeta = \varepsilon l\zeta, u_x = lu, u_z = lw, \varepsilon = h/l. \quad (1.3)$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon$  систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} = 0, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{zz} + 4G \frac{\partial u}{\partial \xi} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{1}{G} \sigma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xx} + 4G \frac{\partial w}{\partial \zeta} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (\text{условие несжимаемости}),$$

где  $G$  — модуль сдвига.

Легко проверить, что соотношение

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xx} + 4G\varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

тождественно удовлетворяется, если удовлетворены остальные уравнения системы (1.4), поэтому в дальнейшем оно рассматриваться не будет. Фактически оно заменяется условием несжимаемости.

Решение системы (1.4) ищется в виде (1-3)

$$Q = \sum_{s=0}^S \varepsilon^{\chi_Q + s} Q^{(s)}(\xi, \zeta), \quad (1.5)$$

где  $Q$  — любое из напряжений и перемещений,  $\chi_Q$  характеризует асимптотический порядок соответствующей величины и определяется таким образом, чтобы после подстановки (1.5) в (1.4) получить непротиворечивую систему относительно  $Q^{(s)}(\xi, \zeta)$ . Эта цель достигается при

$$\chi_{\sigma_{xx}} = \chi_{\sigma_{zz}} = -3, \quad \chi_{\sigma_{xz}} = -2, \quad \chi_u = -1, \quad \chi_w = 0. \quad (1.6)$$

Асимптотика (1.6) принципиально отличается от асимптотики величин аналогичной краевой задачи для сжимаемого слоя (1-3):

$$\chi_{\sigma_{xx}} = \chi_{\sigma_{zz}} = \chi_{\sigma_{xz}} = -1, \quad \chi_u = \chi_w = 0, \quad (1.7)$$

т.е. несжимаемость материала коренным образом меняет картину напряженно-деформированного состояния.

Подставив (1.5) в (1.4), с учетом (1.6) получим непротиворечивую систему относительно коэффициентов разложения  $Q^{(s)}(\xi, \zeta)$ . Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{(s)} &= \sigma_{xz0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xz*}^{(s)}(\xi, \zeta), \\ \sigma_{xz}^{(s)} &= \sigma_{xz}^{(s)}(\xi, \zeta) + 4G \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi}, \\ \sigma_{xz}^{(s)} &= \sigma_{xz0}^{(s)}(\xi) - \zeta \frac{d\sigma_{xz0}^{(s)}}{d\xi} + \sigma_{xz*}^{(s)}(\xi, \zeta), \\ u^{(s)} &= u_0^{(s)}(\xi) + \frac{1}{G} \zeta \sigma_{xz0}^{(s)} - \frac{1}{2G} \frac{d\sigma_{xz0}^{(s)}}{d\xi} + u_*^{(s)}(\xi, \zeta), \\ w^{(s)} &= w_0^{(s)}(\xi) - \frac{1}{2G} \zeta^2 \frac{d\sigma_{xz0}^{(s)}}{d\xi} + \frac{1}{6G} \zeta^3 \frac{d^2 \sigma_{xz0}^{(s)}}{d\xi^2} - \zeta \frac{du_0^{(s)}}{d\xi} + w_*^{(s)}(\xi, \zeta),\end{aligned}\tag{1.8}$$

где величины

$$\begin{aligned}\sigma_{xz*}^{(s)} &= - \int_0^\zeta \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} d\zeta, \quad \sigma_{xz*}^{(s)} = - \int_0^\zeta \left( \frac{\partial \sigma_{xz*}^{(s)}}{\partial \xi} + 4G \frac{\partial^2 u^{(s-2)}}{\partial \xi^2} \right) d\zeta, \\ u_*^{(s)} &= \int_0^\zeta \left( \frac{1}{G} \sigma_{xz*}^{(s)} - \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi} \right) d\zeta, \quad w_*^{(s)} = - \int_0^\zeta \frac{\partial u_*^{(s)}}{\partial \xi} d\zeta\end{aligned}\tag{1.9}$$

для каждого  $s$  являются известными, если построены предыдущие приближения. В (1.8) неизвестные функции интегрирования  $\sigma_{xz0}^{(s)}$ ,  $\sigma_{xz0}^{(s)}$ ,  $u_0^{(s)}$ ,  $w_0^{(s)}$  должны быть определены из граничных условий.

Удовлетворив кинематическим граничным условиям (1.1), получим

$$\begin{aligned}u_0^{(s)}(\xi) &= u_x^{-(s)} + \frac{1}{2} U_x^{(s)} + \frac{1}{2G} \frac{d\sigma_{xz0}^{(s)}}{d\xi} - u_*^{(s)}(\zeta = -1), \\ w_0^{(s)}(\xi) &= u_z^{-(s)} - \frac{du_x^{-(s)}}{d\xi} - \frac{1}{4} \frac{dU_x^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{3G} \frac{d^2 \sigma_{xz0}^{(s)}}{d\xi^2} + \frac{du_*^{(s)}(\zeta = -1)}{d\xi} - w_*^{(s)}(\zeta = -1), \\ \sigma_{xz0}^{(s)} &= \frac{1}{2} G U_x^{(s)},\end{aligned}\tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}U_x^{(s)} &= u_x^{+(s)} - u_x^{-(s)} + u_*^{(s)}(\zeta = -1) - u_*^{(s)}(\zeta = 1) \quad (x, z; u_*, w_*), \\ u_x^{\pm(0)} &= \varepsilon u_x^{\pm} / l, \quad u_z^{\pm(0)} = u_z^{\pm} / l, \quad u_x^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (x, z),\end{aligned}$$

где  $\sigma_{xz0}^{(s)}$  — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \sigma_{zz0}^{(s)}}{d\xi^2} = -\frac{3}{2} G \left( \frac{d\bar{U}_x^{(s)}}{d\xi} + U_z^{(s)} \right), \quad (1.11)$$

$$\bar{U}_x^{(s)} = u_x^{+(s)} + u_x^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = -1) - u_*^{(s)}(\zeta = 1),$$

т.е.

$$\sigma_{zz0}^{(s)} = A^{(s)} \xi + B^{(s)} - \frac{3}{2} G \int_0^\xi \left( \bar{U}_x^{(s)} + \int_0^\xi U_x^{(s)} d\xi \right) d\xi. \quad (1.12)$$

В случае смешанных граничных условий (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xz0}^{(s)} &= \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{(s)}(\zeta = 1) + \frac{d\sigma_{zz0}^{(s)}}{d\xi}, \\ u_0^{(s)} &= u_x^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = -1) + \frac{1}{G} \left( \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{(s)}(\zeta = 1) \right) + \frac{3}{2G} \frac{d\sigma_{zz0}^{(s)}}{d\xi}, \\ w_0^{(s)} &= u_z^{-(s)} - w_*^{(s)}(\zeta = -1) - \frac{d}{d\xi} \left( u_x^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = -1) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2G} \frac{d}{d\xi} \left( \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{(s)}(\zeta = 1) \right) - \frac{5}{6G} \frac{d^2 \sigma_{zz0}^{(s)}}{d\xi^2}, \\ \sigma_{xz}^{+(0)} &= \varepsilon^2 \sigma_{xz}^+, \quad \sigma_{xz}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\sigma_{zz0}^{(s)}$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \sigma_{zz0}^{(s)}}{d\xi^2} = -\frac{3G}{8} U_z^{(s)} - \frac{3}{4} \frac{d}{d\xi} \left[ \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{(s)}(\zeta = 1) + G \left( u_x^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = -1) \right) \right], \quad (1.14)$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz0}^{(s)} &= A^{(s)} \xi + B^{(s)} - \frac{3}{4} \int_0^\xi \left[ \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{(s)}(\zeta = 1) + G \left( u_x^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = -1) \right) \right] d\xi - \\ &\quad - \frac{3G}{8} \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi U_z^{(s)} d\xi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, решение краевой задачи (1.1), (1.4) определяется формулами (1.6)-(1.10), (1.12), а краевые задачи (1.2), (1.4) — формулами (1.6)-(1.9), (1.13), (1.15). Эти решения содержат постоянные интегрирования  $A^{(s)}, B^{(s)}$ , которые могут быть определены из условий, заданных на торцах  $x = \pm l$ . Этим условиям можно удовлетворить интегрально. В частности, если оба торца свободны, то

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx}(x = \pm l, z) dz = 0. \quad (1.16)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям в каждой точке торца, необходимо привлечь решение пограничного слоя (5). Таким образом, получено решение, которое позволяет с произвольно выбранной асимптотической точностью определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения во внутренних точках полосы.

2. В качестве приложения полученных рекуррентных формул приведем решения некоторых частных задач.

а) Пусть продольным краям полосы сообщены постоянные перемещения

$$u_x^+ = \text{const}, \quad u_x^- = \text{const}. \quad (2.1)$$

Используя формулы (1.6)-(1.10), (1.12), (1.16), после трех шагов итерации получается следующее замкнутое решение внутренней задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{3G}{4h^3} (l^2 - x^2 + 3z^2 - h^2) (u_x^+ - u_x^-), \\ \sigma_{zz} &= \frac{3G}{4h^3} (l^2 - x^2 + 3h^2 - z^2) (u_x^+ - u_x^-), \\ \sigma_{xz} &= \frac{G}{2h} (u_x^+ - u_x^-) + \frac{3G}{2h^3} xz (u_x^+ - u_x^-), \\ u_x &= u_x^- + \frac{z+h}{2h} (u_x^+ - u_x^-) + \frac{3}{4h^3} x (z^2 - h^2) (u_x^+ - u_x^-), \\ u_z &= u_z^- + \frac{1}{4h^3} (z+h)^2 (2h-z) (u_x^+ - u_x^-). \end{aligned} \quad (2.2)$$

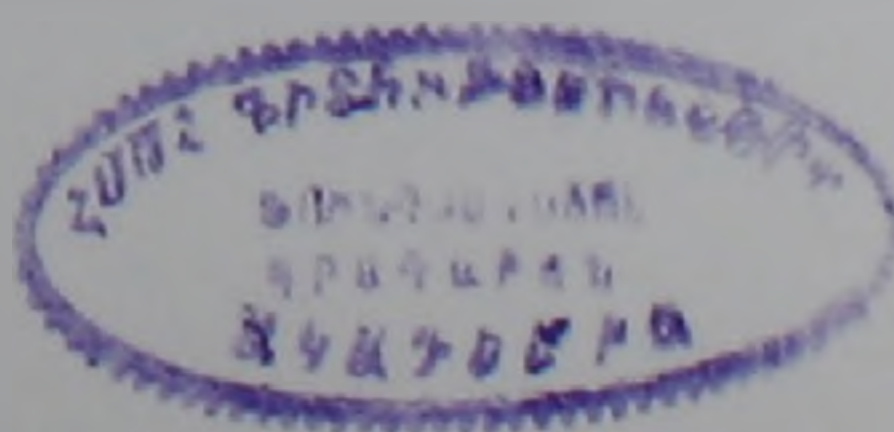
Из (2.2) следует, что нормальные напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}$  в зависимости от координат  $x, z$  меняются параболически и получают свои наибольшие значения в геометрическом центре полосы. В сжимаемой полосе, при таких же граничных условиях (2.1) поле напряжений однородное, а перемещения меняются по высоте полосы линейно (1).

б) Пусть лицевым граням полосы сообщены линейные нормальные перемещения (откос на угол  $\pm\alpha$ )

$$u_x(z = \pm h) = 0, \quad u_z(z = \pm h) = \pm\alpha x \quad (2.3)$$

После трех шагов итерация обрывается и получаем математически точное решение внутренней задачи

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha G}{2h^3} x (l^2 - x^2) + \frac{3\alpha G}{2h^3} x (3z^2 - h^2),$$



$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\alpha G}{2h^3} x(l^2 - x^2) + \frac{3\alpha G}{2h^3} x(3h^2 - z^2), \\ \sigma_z &= \frac{\alpha G}{2h^3} z(3x^2 - l^2) + \frac{3\alpha G}{2h^3} z(h^2 - z^2), \\ u_x &= \frac{\alpha}{4h^3} (z^2 - h^2)(3x^2 - l^2 - z^2 - h^2), \\ u_z &= \frac{\alpha}{2h^3} xz(3h^2 - z^2).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Задачи, точные решения которых приведены в этом параграфе, являются основными в расчетах сейсмоизоляторов, они рассмотрены также в (4), где получены приближенные решения, которые для некоторых величин расходятся с (2.2) и (2.4).

В заключение отметим, что рекуррентные формулы (1.5)-(1.15) позволяют вычислить напряженно-деформированное состояние полосы и при заданных на продольных краях более сложных условиях.

Институт механики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ,

Ռ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ա. Վ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

#### Անսեղմելի նյութերից պատրաստված շերտերի եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծման մասին

Ելնելով առաձգականության տեսության հավասարումներից, ստացված են մի դասի խնդիրների ասիմպտոտիկ ճշգրիտ լուծումները անսեղմելի նյութից պատրաստված շերտերի համար:

Գտնված է նոր ասիմպտոտիկա, որը խիստ տարբերվում է սեղմելի նյութերի նույնատիպ խնդիրների համար նախկինում որոշված ասիմպտոտիկայից: Արտածված են լարումների տինգորի և տեղափոխումների վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար ռեկուրենտ բանաձևեր, երբ երկայնական եզրերում տրված են կինեմատիկական կամ առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ, մասնավորապես, երբ շերտը ենթարկվում է սեղմման և սահքի:

Որպես արտածված բանաձևերի կիրառություն, դիտարկված են մասնավոր խնդիրներ, որոնք մոդելավորում են ռևոլյուցիոնար տեղափոխական սեյսմամեկուսիչների լարումների ու տեղափոխումների դաշտերը, և ստացված են նրանց ճշգրիտ լուծումները:

#### ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Լ.Ա.Աղալովյան, Межвуз.сб. "Механика", Изд.ЕГУ, вып.2, 1982. <sup>2</sup> Լ.Ա.Աղալովյան, Ր.Տ.Գեվորկյան, Тр.ІV Всесоюз.симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов, Новосибирск, Наука, 1984. <sup>3</sup> Լ.Ա.Աղալովյան, Ր.Տ.Գեվորկյան, ПММ. т.50, вып.2 1986. <sup>4</sup> J.M.Kelly, The influence of plate flexibility on the buckling load of elastomeric isolators. Report №UCB/EERC-94/03, 1994. <sup>5</sup> Լ.Ա.Աղալովյան, Межвуз.сб. "Механика", Изд.ЕГУ, вып.3, 1984.