ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3.01

В. М. Барсегян

Пограничный слой трехслойной анизотропной полосы, когда между слоями выполняется полный и неполный контакт

(Представлено академиком НАН Армении Л.А.Агаловяном 7/XI 1996)

Пограничный слой изотропной полосы изучен в ([1]), а для анизотропных пластинок — в ([2]). В случае первой краевой задачи теории упругости для полосы установлена тесная связь погранслоя с принципом Сен-Венана, в частности, для этого класса задач была доказана справедливость этого принципа ([1]). В работе исследуется пограничный слой анизотропной трехслойной термоупругой полосы. Считается, что на одной из продольных кромок полосы заданы компоненты тензора напряжений, на другой — вектор перемещения. Контакт между первым и вторым слоями полный, а между вторым и третьим — неполный.

Построено общее решение погранслоя. Доказано, что погранслой затухает экспоненциально, выведено характерное трансцендентное уравнение, откуда определяется показатель экспоненты, характеризующий скорость затухания.

Краевые задачи теории упругости для полосы являются сингулярно-возмущенными ([1-4]). Поэтому для определения их решений естественно применять асимптотический метод. Асимптотический метод применяется и для решения поставленной краевой задачи.

Требуется определить решение плоского погранслоя для трехслойной анизотропной термоупругой полосы

$$\Omega=\left\{x,y:x\in\left[0,a\right],-h_3\le y\le h_1+h_2\right\},$$

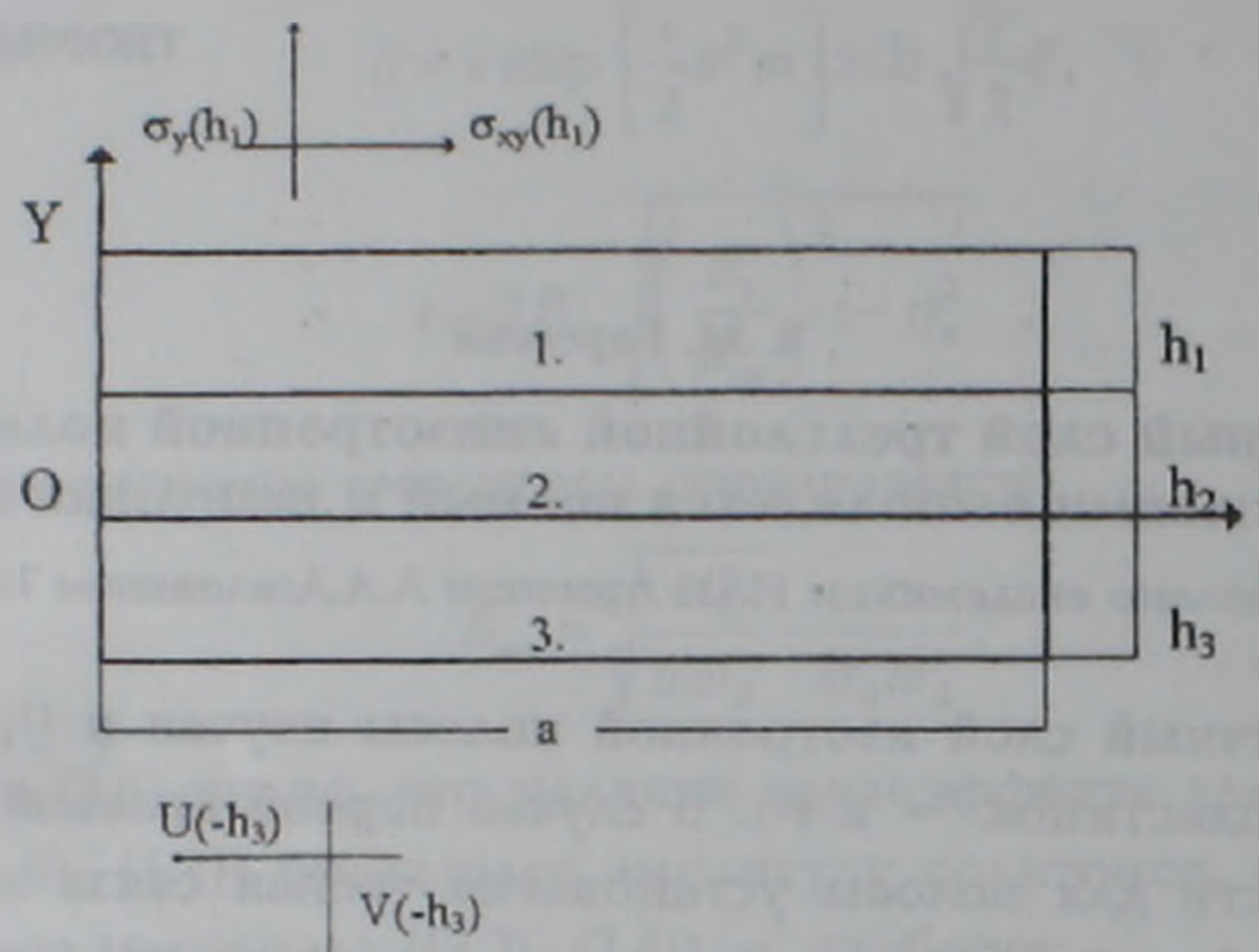
когда на лицевых поверхностях заданы однородные условия (рисунок)

$$\sigma_{xy}^{(1)}(h_1)=\sigma_y^{(1)}(h_1)=0 \text{ при } y=h_1\,,\,u^{(3)}=0\,,v^{(3)}=0 \text{ при } y=-h_3\;, \qquad (1)$$

а на линиях контакта слоев условия полного и неполного контакта

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)},\ \sigma_{y}^{(1)} = \sigma_{y}^{(2)},\quad u^{(1)} = u^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\qquad \text{при}\quad y = h_2;$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(3)} = 0,\ \sigma_{y}^{(2)} = \sigma_{y}^{(3)},\ v^{(2)} = v^{(3)},\qquad \text{при}\quad y = 0 \qquad (2)$$



Пограничный слой будем строить вблизи торца $x = 0$. Данные для погранслоя при $x = a$ можно получить от него формальной заменой переменной x на $(a{-}x)$. Требуется найти такое решение уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела, которое удовлетворяет условиям (1), (2) и имеет затухающий характер при удалении от торца $x = 0$ в глубь Ω.

Температурные воздействия и объемные силы учитываются решением внутренней задачи ([3]), и в силу линейности исходной краевой задачи соответствующие слагаемые непосредственно не войдут в уравнения погранслоя, т.е. погранслой определится из однородных уравнений теории упругости без сохранения в соотношениях обобщенного закона Гука температурных слагаемых.

Влияние вышеуказанных слагаемых на погранслой будет проявляться при сопряжении внутреннего и погранслоя решений на основе удовлетворения торцевым условиям.

В силу сказанного выше в качестве системы разрешающих уравнений погранслоя будет служить следующая система уравнений и соотношений теории упругости:

$$\frac{\partial \sigma_{x}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y}^{(i)}}{\partial y} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}=a_{11}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{12}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)},\\
&\frac{\partial V^{(i)}}{\partial y}=a_{12}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{22}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+a_{26}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)},\\
&\frac{\partial U^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial V^{(i)}}{\partial x}=a_{16}^{(i)}\sigma_x^{(i)}+a_{26}^{(i)}\sigma_y^{(i)}+a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Чтобы решить поставленную задачу, в уравнениях и соотношениях (3) перейдем к новым независимым безразмерным переменным: $t=x/h$, $\varsigma=y/h$, $u=U/a$, $v=V/a$, где $-h_3\le y\le h_1+h_2$, $h_1+h_2+h_3<<a$, $h=\max\left(h_1,h_2,h_3\right)$.

В результате получим сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/a$ систему. Решение этой системы отыщем в виде (4)

$$
\sigma^{(i)}=\varepsilon^{-1+s}\sigma^{(i,s)}(t,\varsigma),\ u^{(i)}=\varepsilon^{s}\cdot u^{(i,s)}(t,\varsigma),\ S=0,N,
\tag{4}
$$

где $\sigma^{(i)}$ — любое из напряжений, $u^{(i)}$ — любое из безразмерных перемещений погранслоя. Предполагается, что по немому (повторяющемуся) индексу s всегда происходит суммирование от 0 до N, N — число приближений. В свою очередь, величины $\sigma^{(i,s)}$, $u^{(i,s)}$ будем искать в виде функций типа погранслоя:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma_x^{(i,s)},\sigma_{xy}^{(i,s)},\sigma_y^{(i,s)},u^{(i,s)},v^{(i,s)}\right)=\\
&=\left(\sigma_1^{(i,s)}(\varsigma),\sigma_{12}^{(i,s)}(\varsigma),\sigma_2^{(i,s)}(\varsigma),u_1^{(i,s)}(\varsigma),u_2^{(i,s)}(\varsigma)\right)\exp(-\lambda t).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

После подстановки (4), (5) в преобразованные уравнения (3) получим следующую систему относительно $\sigma_{ik}^{(i,s)}(\varsigma),u_k^{(i,s)}(\varsigma)$:

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\sigma_1^{(i,s)}+\frac{d\sigma_{12}^{(i,s)}}{d\varsigma}=0,\ -\lambda\sigma_{12}^{(i,s)}+\frac{d\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma}=0,\\
&\frac{du_1^{(i,s)}}{d\varsigma}-\lambda u_2^{(i,s)}=a_{16}^{(i)}\sigma_1^{(i,s)}+a_{26}^{(i)}\sigma_2^{(i,s)}+a_{66}^{(i)}\sigma_{12}^{(i,s)},\\
&-\lambda u_1^{(i,s)}=a_{11}^{(i)}\sigma_1^{(i,s)}+a_{12}^{(i)}\sigma_2^{(i,s)}+a_{16}^{(i)}\sigma_{12}^{(i,s)},\\
&\frac{du_2^{(i,s)}}{d\varsigma}=a_{12}^{(i)}\sigma_1^{(i,s)}+a_{22}^{(i)}\sigma_2^{(i,s)}+a_{26}^{(i)}\sigma_{12}^{(i,s)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В (6) все неизвестные можно выразить через $\sigma_2^{(i,s)}$ по формулам:

$$
\sigma_{12}^{(i,s)}=\frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma},\ \sigma_1^{(i,s)}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma^2},
$$

$$u_1^{(i,s)} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_{11}^{(i)}}{\lambda^2}\frac{d^2\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma^2} + \frac{a_{16}^{(i)}}{\lambda}\frac{d\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma} + a_{12}^{(i)}\sigma_2^{(i,s)}\right),$$

$$u_2^{(i,s)} = -\frac{a_{11}^{(i)}}{\lambda^4}\frac{d^3\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma^3} - \frac{2a_{16}^{(i)}}{\lambda^3}\frac{d^2\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma^2} - \tag{7}$$

$$-\left(a_{12}^{(i)} + a_{66}^{(i)}\right)\frac{1}{\lambda^2}\frac{d\sigma_2^{(i,s)}}{d\varsigma} - \frac{a_{26}^{(i)}}{\lambda}\sigma_2^{(i,s)}.$$

Для определения $\sigma_2^{(i,s)}$ из системы (6) вытекает уравнение

$$a_{11}^{(i)}\sigma_2^{IV(i,s)} + 2a_{16}^{(i)}\lambda\sigma_2^{III(i,s)} + \left(a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i,s)}\right)\lambda^2\sigma_2^{II(i,s)} +$$
$$+2a_{26}^{(i)}\lambda^3\sigma_2^{I(i,s)} + a_{22}^{(i)}\lambda^4\sigma_2^{(i,s)} = 0. \tag{8}$$

В силу объемистости соответствующего (7), (8) решения в дальнейшем будем рассматривать решение погранслоя для ортотропной полосы. Для ортотропной полосы $a_{16}^{(i)} = a_{26}^{(i)} = 0$ $\sigma_2^{(i,s)}$ определяется из уравнения

$$a_{11}^{(i)}\sigma_2^{IV(i,s)} + \left(a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i)}\right)\lambda^2\sigma_2^{II(i,s)} + a_{22}^{(i)}\lambda^4\sigma_2^{(i,s)} = 0. \tag{9}$$

В зависимости от возможных значений упругих постоянных a_{jk} характеристическое уравнение, соответствующее (9), может иметь корни следующих типов:

а) $\pm i\beta^{(i)}$, б) $\pm i\beta_1^{(i)}, \pm i\beta_2^{(i)}$, в) $\pm\alpha^{(i)} \pm i\beta^{(i)}$,

которым соответствуют решения:

а) $$\sigma_2^{(i,s)}(\varsigma) = \left(A^{(i,s)} + B^{(i,s)}\varsigma\right)\cos\lambda\beta^{(i)}\varsigma + \left(C^{(i,s)} + D^{(i,s)}\varsigma\right)\sin\lambda\beta^{(i)}\varsigma, \tag{10}$$

б) $$\sigma_2^{(i,s)}(\varsigma) = \left(A^{(i,s)}\cos\lambda\beta_1^{(i)}\varsigma + B^{(i,s)}\sin\lambda\beta_1^{(i)}\varsigma\right) + \tag{11}$$
$$+\left(C^{(i,s)}\cos\lambda\beta_2^{(i)}\varsigma + D^{(i,s)}\sin\lambda\beta_2^{(i)}\varsigma\right),$$

в) $$\sigma_2^{(i,s)}(\varsigma) = A^{(i,s)}\varphi_1^{(i)} + B^{(i,s)}\varphi_2^{(i)} + C^{(i,s)}\varphi_3^{(i)} + D^{(i,s)}\varphi_4^{(i)}, \tag{12}$$
$$\varphi_1^{(i)} = ch\alpha^{(i)}\lambda\varsigma\cos\lambda\beta^{(i)}\varsigma,\ \varphi_2^{(i)} = sh\alpha^{(i)}\lambda\varsigma\sin\lambda\beta^{(i)}\varsigma,$$
$$\varphi_3^{(i)} = ch\alpha^{(i)}\lambda\varsigma\sin\lambda\beta^{(i)}\varsigma,\ \varphi_4^{(i)} = sh\alpha^{(i)}\lambda\varsigma\cos\lambda\beta^{(i)}\varsigma,$$

где для случая а) $\Delta^{(i)} = \left(a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i)}\right)^2 - 4a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)} = 0,$

$$\beta^{(i)} = \sqrt{E_1^{(i)} / E_2^{(i)}}\ , \tag{13}$$

для случая б) $\Delta^{(i)} > 0,$

$$\beta_1^{(i)}=\sqrt{\frac{\left|a_{66}^{(i)}+2a_{12}^{(i)}\right|-\sqrt{\Delta^{(i)}}}{2a_{11}^{(i)}}},$$

$$\beta_2^{(i)}=\sqrt{\frac{\left|a_{66}^{(i)}+2a_{12}^{(i)}\right|+\sqrt{\Delta^{(i)}}}{2a_{11}^{(i)}}}, \tag{14}$$

для случая в) $\Delta^{(i)}<0$,

$$\alpha^{(i)}=\sqrt{\frac{\sqrt{a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)}}-\left|\frac{1}{2}a_{66}^{(i)}+a_{12}^{(i)}\right|}{2a_{11}^{(i)}}},$$

$$\beta^{(i)}=\sqrt{\frac{\sqrt{a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)}}+\left|\frac{1}{2}a_{66}^{(i)}+a_{12}^{(i)}\right|}{2a_{11}^{(i)}}}. \tag{15}$$

Вычислив компоненты тензора напряжений и вектора перемещения по формулам (7) и удовлетворив граничным условиям (1) и условиям контакта (2), получим для каждого из трех случаев систему однородных алгебраических уравнений относительно двенадцати неизвестных постоянных коэффициентов $A^{(i,s)}, B^{(i,s)}, C^{(i,s)}, D^{(i,s)}$. Из условия существования нетривиального решения определитель Δ этой системы должен равняться нулю. В результате получим трансцендентное уравнение, откуда определяется λ, при этом каждому λ соответствует $\bar{\lambda}$. Выписывать это уравнение не сложно, из-за объемистости оно не приводится. Первый корень с $\operatorname{Re}\lambda_1>0$ уравнения $\Delta=0$ будет характеризовать скорость затухания погранслоя: $\exp(-\operatorname{Re}\lambda_1 t)$.

В решениях (10)-(12) все постоянные можно выразить через одну, и поскольку каждому λ соответствует $\bar{\lambda}$, общее решение погранслоя будет содержать две группы произвольных вещественных констант, что в совокупности с решением внутренней задачи позволяет удовлетворить двум условиям на торце $x=0$.

Процедура сопряжения внутреннего решения и погранслоя такая же, что и в [4].

Институт механики НАН Армении

Վ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Անիզոտրոպ եռաշերտի սահմանային շերտերի մասին, երբ շերտերի միջև տեղի ունի լրիվ և ոչ լրիվ կոնտակտ

Ուսումնասիրվում է անիզոտրոպ ջերմաառաձգական եռաշերտի սահմանային շերտը: Ընդունված է, որ եռաշերտի մի երկայնական կողմի վրա տրված են լարումների թենզորի բաղադրիչները, իսկ մյուս կողմի վրա տեղափոխման վեկտորը: Առաջին և երկրորդ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է, իսկ երկրորդի և երրորդի միջև՝ ոչ լրիվ:

Կառուցված է սահմանային շերտի ընդհանուր լուծումը: Ապացուցված է, որ սահմանային շերտը մարում է էքսպոնենցիալ ձևով: Դուրս է բերված բնութագրող տրանսցենդենտ հավասարում, որից որոշվում է մարման արագությունը բնութագրող էքսպոնենտի ցուցիչը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л.А.Агаловян*, Изв.АН Арм.ССР, Механика, т.30, №5 (1977). [2] Л.А.Агаловян, ДАН Арм.ССР, т.55, №3 (1972). [3] *А.Б.Товмасян*, ДАН Армении, т.94, №2 (1992). [4] *Л.А.Агаловян*, Межвуз. сб. "Механика", изд. ЕГУ, вып.3, 1984.