

МЕХАНИКА

УДК 539.3.532.59

Л. А. Мовсисян

К модуляционной устойчивости нелинейных волн
в пьезоэлектрической пластинке

(Представлено академиком НАН Армении М. А. Задосяном 1/IV 1997)

В работе (1) приведен интересный факт. Как известно (например, (2)), обычно при рассмотрении нелинейных колебаний пластин продольным инерционным членом пренебрегают. Получается, что нелинейная частота больше линейной, что соответствует "жесткой" характеристике нелинейности. При изучении же распространения нелинейных волн это приводит к модуляционной устойчивости (3). Однако удержание продольного инерционного члена совершенно меняет картину (1) — получается неустойчивость.

Было интересно выяснить, влияет ли пьезоэлектричество на это и каким образом? В данной статье этот вопрос рассматривается для двух пьезоэлектриков гексагональной системы классов $\bar{6}m2$ и $6mm$ (4). Для первого материала электричество индуцируется при продольном колебании, а для второго — при изгибном.

1. Одномерные уравнения колебаний возьмем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Уравнения напряженности электрического поля и электрической индукции

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0 \quad (1.2)$$

для первого материала — $\bar{6}m2$ (4) в предположении параболической изменяемости электрического потенциала по высоте

$$\phi = F(x, t) \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$$

пластинки (5) дают следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} F + \frac{3e}{2\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (1.3)$$

Система (1.1) в перемещениях выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} h e \frac{\partial F}{\partial x} \right\} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(C_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} h e \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение систем (1.3)-(1.4) будем искать как

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_2 e^{2i\tau} + \bar{u}_2 e^{-2i\tau}, \quad w = w_1 e^{i\tau} + \bar{w}_1 e^{-i\tau}, \\ F &= F_2 e^{2i\tau} + \bar{F}_2 e^{-2i\tau}, \quad \tau = kx - \omega t. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя u , w и F из (1.5) в (1.3) и (1.4) и выражая все постоянные через w_1 и $\bar{w}_1$, при этом учитывая (3), приближенное равенство

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \approx c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \frac{d\omega_2}{dk}, \quad \text{получим для нелинейной изгибаемой частоты}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_2^2 (1 - \alpha a^2 k^2), \\ a^2 &= 4w_1 \bar{w}_1, \quad \alpha = \frac{9 - C(1 - 8\mu)}{8(1 - \mu c)}, \\ \mu &= 1 + \frac{1}{12} k^2 h^2, \quad C = \frac{e^2}{A_{11} \varepsilon_1} \left(1 + \frac{3}{k^2 h^2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При этом линейные частоты соответственно продольным и поперечным колебаниям определяются

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{B_{11} k^2}{\rho} (1 - \beta k^2 h^2), \quad \omega_2^2 = \frac{D_{11} k^4}{\rho h}, \\ \beta &= \frac{e^2}{B_{11} (12\varepsilon_2 + \varepsilon_1 k^2 h^2)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Для второго материала вместо (1.3) будем иметь

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} F - \frac{3}{2} \frac{e_1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

а уравнениями движения пластинки будут

$$C_{11} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + \frac{2}{3} e_1 h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

Решение (2.1) и (2.2) также ищется в виде (1.5). Производя необходимые процедуры для нелинейной изгибной частоты, получим

$$\omega^2 = \omega_2^2 \left(1 - \alpha a^2 k^2 \right), \quad \alpha = \frac{9}{8}. \quad (2.3)$$

При этом линейными частотами являются

$$\omega_1^2 = \frac{A_{11}}{\rho} k^2, \quad \omega_2^2 = \frac{D_{11} k^4}{\rho h} (1 - \beta). \quad (2.4)$$

Таким образом, для данного материала пьезоэффект на нелинейную часть не влияет.

3. Для обсуждения вопроса модуляционной устойчивости следует привести нелинейное уравнение Шредингера и выяснить, какую роль играет пьезоэффект в его коэффициентах для различных материалов. Как известно (3.5), дисперсионному соотношению $\omega = \omega(k, |A|^2)$ соответствует такое уравнение

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk} \frac{\partial}{\partial x} \right) A + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial |A|^2} \right)_0 A |A|^2 = 0, \quad (3.1)$$

где ω_0 — линейная частота, которое можно привести к каноническому виду, сначала перейдя к системе отсчета, движущейся с линейной групповой скоростью $\frac{d\omega_0}{dk}$, а затем — перенормировав переменные. Тогда в безразмерных координатах получится

$$i \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + \gamma |B|^2 B = 0, \quad (3.2)$$

$$B = kA, \quad \theta = \omega_0 t, \quad x = \sqrt{\frac{2\omega_0}{\omega_0''}} \frac{\xi}{k^2} + \frac{\omega_0'}{\omega_0} \theta, \quad \gamma = -\frac{1}{2} \alpha.$$

В качестве линейной частоты ω_0 должны брать ω_2 . Как известно (3), условие устойчивости есть

$$\gamma \omega_0'' > 0. \quad (3.3)$$

Для рассмотренных случаев $\omega_0'' > 0$ и $\gamma < 0$ ($\alpha > 0$), т.е. пьезоэффект не нарушает неустойчивость.

Теперь, если рассмотреть задачу с начальным условием (6.7), воздействие прямоугольного импульса

$$B = \begin{cases} B_1, & \text{при } |t| \leq 0,5t_0, \\ 0, & \text{при } |t| > 0,5t_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где t_0 — время действия граничного импульса амплитуды B_1 . Решение (3.2) и (3.4) записывается

$$B = s \exp \left[\frac{i}{2} s^2 \gamma x \right] \operatorname{sch} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \xi, \quad (3.5)$$

$$s = 2B_{np} \sqrt{\left(\frac{B_1}{B_{np}} \right)^2 - \eta_n^2}.$$

Пороговое значение амплитуды определяется

$$B_{np} = \sqrt{\frac{\omega_0''}{\alpha \omega_0}} \cdot \frac{\pi}{k t_0 \omega_0'}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) видно, что наличие пьезоэффекта для первого материала ((1.6), (1.7)) уменьшает амплитуду солитонов, в то время как для второго материала ((2.3), (2.4)) — наоборот.

Институт механики НАН Армении

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Պիեզաէլեկտրիկ սալում ոչ գծային ալիքների մոդուլյացիոն կայունության մասին

Դիտարկվում է հեքսոգոնալ համակարգի երկու դասի պիեզաէլեկտրիկներից շերտ-սալում ոչ գծային ալիքների տարածման կայունության հարցը: Նյութերից մեկում էլեկտրականությունն ինդուկցվում է երկայնական, իսկ մյուսում՝ ընդայնական տատանումների դեպքում: Հայտնի է, որ ⁽¹⁾ շարժման հավասարումներում երկայնական իներցիայի անդամի պահելը բերում է ալիքների մոդուլյացիայի անկայունության: Հավասարումների լուծումը փնտրվում է վազոդ ալիքների տեսքով: Ցույց է տրվում, որ պիեզաէլեկտր երկու դեպքում էլ չի փոխում կայունության բնույթը. բայց տարբեր նյութերում նրա առկայությունը տարբեր ձևով է ազդում սոլիտոնների ամպլիտուդների վրա՝ մի դեպքում մեծանում է սոլիտոնների ամպլիտուդը, իսկ մյուս դեպքում՝ ընդհակառակը:

ЛИТЕРАТУРА – ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А.Г.Багдоев, Л.А.Мовсисян, Изв. АН Арм ССР. Механика, т.41, №3, с.3-6 (1986).
- ² А.С.Вольмир, Нелинейная динамика пластинок и оболочек, М., Наука, 1972.
- ³ Дж.Уизем, Линейные и нелинейные волны, М., Мир, 1977, 568 с.
- ⁴ Э.Дьелссан, Д.Руайе, Упругие волны в твердых телах, М., Наука, 1982.
- ⁵ Р.Дода, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон и др., Солитоны и нелинейные волновые уравнения, М., Мир, 1988.
- ⁶ В.П.Лукомский, Укр. физ. журн., т.24, №7, с.975-981 (1979).
- ⁷ А.Г.Багдоев, Л.А.Мовсисян, Изв. АН Арм ССР. Механика, т.40, №6, с.14-21 (1987).