ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 939.3.533.6.013.42

С. Г. Саакян

Функция Грина для упругого неоднородного акустического полупространства

(Представлено академиком НАН Армении Б. Л. Абрамяном 25/VII 1996)

В работе приводится решение задачи о возбуждении волн давления в упругом неоднородном акустическом полупространстве точечным источником массовых сил.

1. *Постановка задачи и ее формальное решение.* Векторное уравнение Ламе в перемещениях для упругой неоднородной акустической среды с учетом плотности массовых сил $\bar{F}$ имеет вид ([1])

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\left(\lambda \operatorname{div}\bar{u}\right)-\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}+\bar{F}=\bar{0}. \tag{1.1}$$

Применив операцию дивергенции к уравнению (1.1), получим

$$\Delta p-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\rho\,.\operatorname{grad}\rho-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\rho\operatorname{div}\bar{F}, \tag{1.2}$$

где Δ — оператор Лапласа, $p=-\lambda\operatorname{div}\bar{u}$, $c=\sqrt{\lambda/\rho}$.

Строим решение задачи Грина в цилиндрической системе координат (r,θ,z) при условии, что коэффициент сжатия λ и плотность ρ среды заданы функциями

$$\lambda=\lambda_0(1+az)^{\alpha},\ \rho=\rho_0(1+az)^{\alpha}, \tag{1.3}$$

где λ_0, ρ_0, a, α — известные постоянные.

Исследуем задачу Грина для уравнения (1.2), т.е. ищем решение уравнения

$$\Delta p-\frac{\alpha}{z+h}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{c_0}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-2p_0^{\bullet}\frac{\delta(r)}{r}\delta(z-z_0)\delta(t) \tag{1.4}$$

при условиях

$$p(r,z,t)\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial p(r,z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0;\ \lim_{z\to+\infty}p(r,z,t)=0, \qquad (1.5)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, $c_0=\sqrt{\lambda_0/\rho_0}$, $h=a^{-1}$.

Представим решение уравнения (1.4) в виде

$$p(r,z,t)=(z+h)^{\nu}\,p^{*}(r,z,t);\ \nu=\frac{1-\alpha}{2}. \qquad (1.6)$$

Тогда, подставляя (1.6) в (1.4), получим

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial r}+\frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2}+\frac{1}{z+h}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial z}-\frac{\nu^2}{z+h}p^*-\frac{1}{c_0^2}\cdot\frac{\partial^2 p^*}{\partial t^2}=$$
$$=-2p_0^*(z+h)^{-\nu}\frac{\delta(r)}{r}\delta(z-z_0)\delta(t). \qquad (1.7)$$

Решение задачи Грина находим методом интегральных преобразований. Применим к уравнению (1.7) преобразование Лапласа по t, а затем преобразование Ханкеля по r, полагая:

$$\overline{p}^{*}(r,z,s)=\int_0^\infty p^{*}(r,z,t)e^{-st}dt, \qquad (1.8)$$

$$\overline{p}_\nu^{*}(r,\xi,s)=\int_0^\infty \overline{p}^{*}(r,z,s)J_\nu(\xi(z+h))(z+h)dz, \qquad (1.9)$$

где $J_0(t)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν.
В результате получаем из (1.7)

$$\frac{\partial^2\overline{p}_\nu^{*}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\overline{p}_\nu^{*}}{\partial r}-\left(\xi^2+\frac{s^2}{c_0^2}\right)\overline{p}_\nu^{*}=-2p_0^*(z_0+h)^{1-\nu}J_\nu(\xi(z_0+h))\frac{\delta(r)}{r}. \qquad (1.10)$$

Общее решение однородного уравнения (1.10), как известно, имеет вид

$$\overline{p}_\nu^{*}(r,\xi,s)=C_1I_0(\beta r)+C_2K_0(\beta r), \qquad (1.11)$$

где $I_0(\beta r)$, $K_0(\beta r)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка, $\beta=\sqrt{\xi^2+(s/c_0)^2}$.

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий задачи. Функция Грина, во-первых, ограничена на бесконечности, поэтому $C_1=0$; во-вторых, она имеет при $r\to0$ и $z=z_0$ особенность типа дельта-функции. Так как $K_0(\beta r)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to0}rK_0^1(r)=-1$, имеем

$$C_2 = 2p_0^*(z_0+h)^{1-\nu} J_\nu(\xi(z_0+h)). \tag{1.12}$$

Окончательно функция Грина в изображениях представляется формулой

$$\overline{p}_\nu^*(r,\xi,s) = 2p_0^*(z_0+h)^{1-\nu} J_\nu(\xi(z_0+h)) K_0(\beta r). \tag{1.13}$$

2. *Переход к оригиналу.* Теперь находим оригинал изображения более общего вида, чем (1.13):

$$\overline{p}_{\nu\varepsilon}^*(r,\xi,s) = 2p_0^*(z_0+h)^{1-\nu} \beta^{-\varepsilon} J_\nu(\xi(z_0+h)) K_\varepsilon(\beta r). \tag{2.1}$$

Известно ([2]), что изображение (2.1), непрерывно зависящее от $\varepsilon\left(\varepsilon > -\frac{1}{2}\right)$, имеет оригинал

$$p_{\nu\varepsilon}^*(r,\xi,t) = \sqrt{2\pi}\, p_0^*(z_0+h)^{1-\nu} y^{\varepsilon-1/2} r^{-\varepsilon} \xi^{1/2-\varepsilon} \cdot$$
$$\cdot H(c_0t-r) J_\nu(\xi(z_0+h)) J_{\varepsilon-1/2}(\xi y), \tag{2.2}$$

где

$$y = \sqrt{(c_0t)^2 - r^2}. \tag{2.3}$$

Применив к (2.2) формулу обращения Ханкеля, получим

$$p_\varepsilon^*(r,z,t) = \sqrt{2\pi}\, p_0^*(z_0+h)^{1-\nu} y^{\varepsilon-1/2} r^{-\varepsilon} H(c_0t-r) \cdot$$
$$\cdot \int_0^\infty \xi^{3/2-\varepsilon} J_\nu(\xi(z_0+h)) J_\nu(\xi(z+h)) J_{\varepsilon-1/2}(\xi y)\, d\xi. \tag{2.4}$$

Используя известные результаты ([3]) (с.225), вычислим интеграл (2.4). Имеем

$$p_\varepsilon^*(r,z,t) = c_0 p_0^*(z_0+h)^{\varepsilon-\nu-1/2} (z+h)^{\varepsilon-3/2} r^{-\varepsilon} \Big\{ H(c_0t-R) \sin^{\varepsilon-1} v \cdot$$
$$\cdot P_{\nu-1/2}^{1-\varepsilon}(\cos v) + \frac{2}{\pi} H(c_0t+R_h) \operatorname{sh}^{\varepsilon-1} u \cos[(\nu-\varepsilon)\pi] \exp(\pi\varepsilon i) Q_{\nu-1/2}^{1-\varepsilon}(\operatorname{ch} u) \Big\}, \tag{2.5}$$

где $P_\nu^l(z)$, $Q_\nu^l(z)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, соответственно,

$$R = \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2},\quad R_h = \sqrt{r^2 + (z+z_0+2h)^2}, \tag{2.6}$$

$$2(z_0+h)(z+h)\cos v = r^2 + (z_0+h)^2 + (z+h)^2 - (c_0t)^2, \tag{2.7}$$

$$2(z_0+h)(z+h)\operatorname{ch} u = (c_0t)^2 - (z_0+h)^2 - (z+h)^2 - r^2. \tag{2.8}$$

Вычислим предел функции $p_\varepsilon^*(r,z,t)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$p^*(r,z,t)=\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon^*(r,z,t)=c_0 p_0^*(z_0+h)^{-\nu-1/2}(z+h)^{-3/2}\cdot$$

$$\left\{H(c_0 t-R)\sin^{-1}\nu P_{\nu-1/2}^1(\cos\nu)+\frac{2}{\pi}H(c_0 t-R_h)\operatorname{sh}^{-1}u\cos(\nu\pi)Q_{\nu-1/2}^1(\operatorname{ch}u)\right\}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (1.6), окончательно получаем для функции Грина выражение

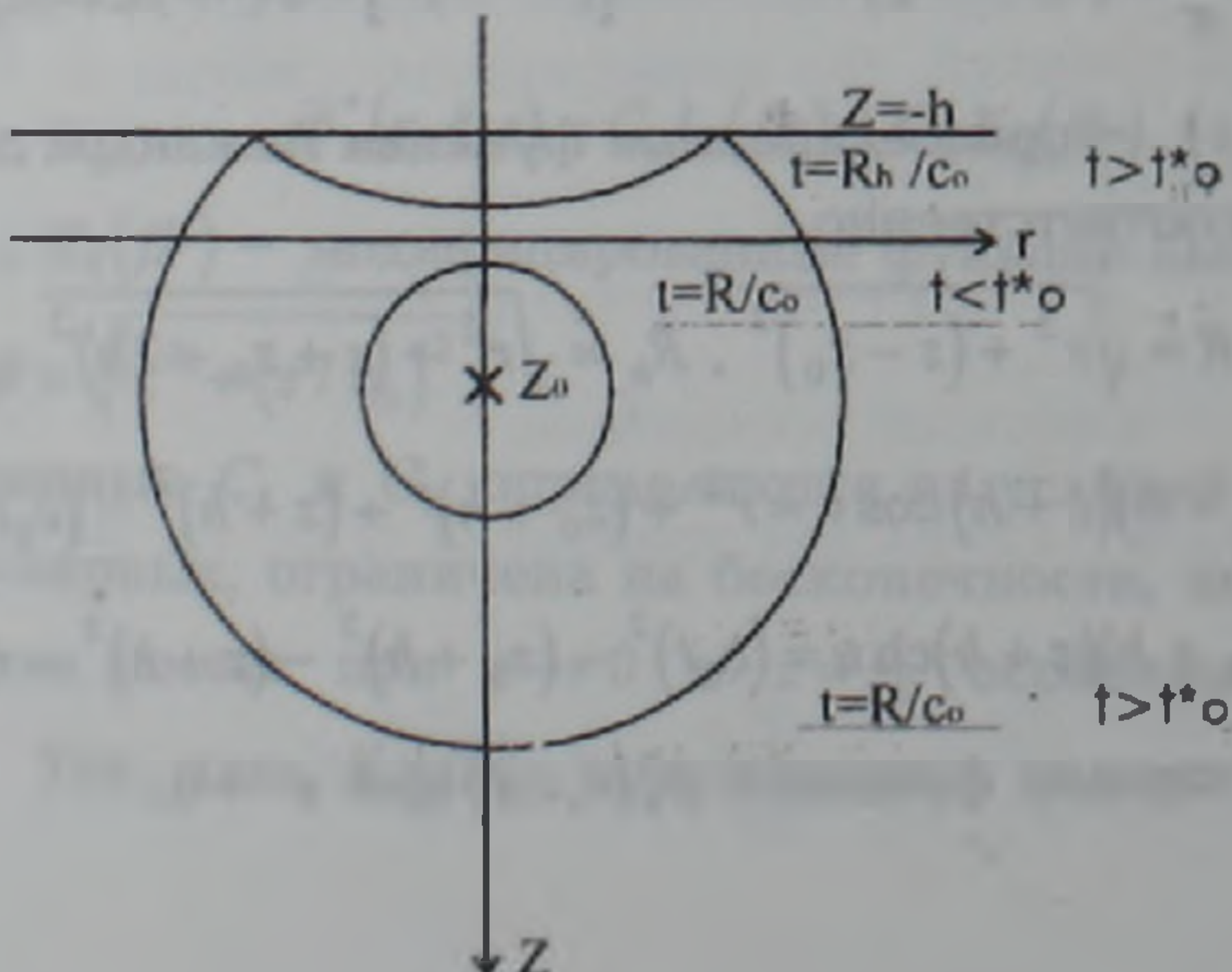
$$p(r,z,t)=p_0 A(z)B(r,z,t), \tag{2.10}$$

где

$$p_0=c_0(z_0+h)^2 p_0^*,\ A(z)=\left(\frac{z+h}{z_0+h}\right)^{\nu-3/2}, \tag{2.11}$$

$$B(r,z,t)=H(c_0 t-R)\sin^{-1}\nu P_{\nu-1/2}^1(\cos\nu)+$$
$$+\frac{2}{\pi}H(c_0 t-R_h)\operatorname{sh}^{-1}u\cos(\nu\pi)Q_{\nu-1/2}^1(\operatorname{ch}u). \tag{2.12}$$

Как видно, функция Грина (2.10) является произведением двух множителей. Первый из них — $A(z)$ определяет амплитуду, а второй — $B(r,z,t)$ — характер и геометрию распространения волн давления. Падающая волна давления (первый член $B(r,z,t)$) в любой момент времени $t \le t_0^* = (z_0+h)/c_0$ имеет сферический фронт $R=c_0 t$. Как только падающая волна доходит до плоской границы полупространства, происходит полное внутреннее отражение. Отраженная волна давления (второй член $B(r,z,t)$) появляется для времени $t > t_0^*$ и имеет фронт — часть сферы $R_h = c_0 t$ и $z>-h$. Эта так называемая "нелучевая" волна (4) распространяется так, будто лучи исходят из источника массовых сил, находящегося в точке $(0,-(z_0+2h))$. Фактически для наблюдателя волны распространяются от "мнимого", т.е. нереально существующего, источника.



Следует отметить, что для некоторых неоднородностей, когда $\cos\nu\pi = 0$ и, следовательно, $\alpha = -2n$, падающая волна в приповерхностном слое полупространства полностью погашается, и в этих случаях отраженные волны не появляются.

Геометрия распространения волн давления изображена на рисунке для времени $t < t_0^*$ и $t > t_0^*$.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Գրինի ֆունկցիան առաձգական անհամասեռ ակուստիկական կիսատարածության համար

Աշխատանքում ուսումնասիրված է զանգվածային ուժի ներքին կետային աղբյուրից առաջացած ճնշման ալիքների տարածումը առաձգական անհամասեռ ակուստիկական կիսատարածության մեջ: Ենթադրվում է, որ միջավայրի մեխանիկական հատկությունները փոխվում են խորությունից կախված աստիճանային օրենքով:

Գրինի առանցքասիմետրիկ խնդրի ճշգրիտ լուծումը ստացված է ինտեգրալ ձևափոխությունների եղանակով: Ուսումնասիրված են ճնշման ալիքների տարածման, ինչպես նաև, կիսատարածության հարթ մակերևույթից նրանց անդրադարձման օրինաչափությունները: Նշված է անհամասեռության դեպքեր, երբ ընկնող ալիքները կիսատարածության մակերևույթի մոտ մարում են և ալիքների անդրադարձում տեղի չունի:

ЛИТЕРАТУРА-ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С.Г.Саакян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т.40, №4 (1987). [2] *Г.Бейтман, А.Эрдейн*, Таблицы интегральных преобразований, т.1, М., Наука, 1969. [3] *А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев*, Интегралы и ряды. Специальные функции, М., Наука, 1983. [4] *В.М.Бабич, А.П.Киселев*, Геометросейсмическое описание "нелучевых" волн P*, S*, ..., Препринт ЛОМИ Р-11-87 Л. (1987).