УДК 519.1

А. А. Саакян

Об одном классе $(0,1)$ матриц, связанных с разбиениями
подмножеств E^n

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукурьяном 2/V 1996)

В работе рассматривается задача описания характеристических векторов разбиений подмножеств вершин n -мерного единичного куба E^n , которая возникла при решении дискретной изотермической задачи (1).

Основываясь на множестве характеристических векторов разбиений подмножеств вершин, представляемых множествами нулей или единиц монотонных булевых функций, определенных в E^n , показано, что данное описание можно вести в терминах многомерной многозначной решетки.

Представим E^n в виде n -ой декартовой степени множества $E = \{0,1\}$. Набор $\tilde{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \in E^n$, получаемый фиксацией значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответствует коду вершины E^n . Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на E^n , является монотонной, если $\forall \tilde{\alpha} \in E^n, f(\tilde{\alpha}) = 1 \Rightarrow f(\tilde{\beta}) = 1$, для всех $\tilde{\beta} > \tilde{\alpha}$.

Рассмотрим подмножество $M \subseteq E^n$, некоторой заранее фиксированной мощности m , $0 \leq m \leq 2^n$. Характеристический вектор разбиений множеств M это n -мерный целочисленный вектор $S = (s_1, \dots, s_n)$, координаты которого соответствуют мощностям разбиений множества M по координатам $i = 1, \dots, n$. s_i равно мощности одного из разбиений множества M по направлению i , и тогда $m - s_i$ равно мощности другого разбиения, и для однозначности выбора вектора S удобно предположить, что s_i мощность разбиения с $x_i = 1$. Пусть Ξ_{m+1}^n множество вершин n -мерной $m+1$ -значной решетки, т.е. множество всех тех векторов $S = (s_1, \dots, s_n)$, для которых $0 \leq s_i \leq m$, для $i = 1, \dots, n$. Множество всех характеристических векторов разбиений

при фиксированном m обозначим через Ψ_{m+1} . Ясно, что $\Psi_{m+1} \subseteq \Xi_{m+1}^n$. Обозначим через M_{m+1}^1 (соответственно M_{m+1}^0) множество всех характеристических разбиений m -подмножеств, которые соответствуют множеству всех единиц (соответственно нулей) некоторой монотонной булевой функции, определенной на E^n :

$$M_{m+1}^1 \subseteq \Psi_{m+1},$$

$$M_{m+1}^0 \subseteq \Psi_{m+1}.$$

Основным результатом данной работы является полное описание множества Ψ_{m+1} , основанное на структурах, в которых особое место занимают множества M_{m+1}^1, M_{m+1}^0 . Описание дается в терминах геометрии Ξ_{m+1}^n , где вершины представляются размещенными по $m \times n + 1$ слоям. На нулевом слое решетки находится нулевой вектор $(0, \dots, 0)$, на i -ом слое находятся все те векторы, которые больше некоторого вектора из $i - 1$ -го слоя ровно в одной компоненте и ровно на одну единицу. На $m \times n + 1$ слое находится вектор $(m, \dots, m)$.

Рассматриваемая нами задача связана также с задачами $(0,1)$ -матриц: множество Ψ_{m+1} состоит из всех тех векторов $S = (s_1, \dots, s_n)$ из Ξ_{m+1}^n , для которых класс всех $(0,1)$ -матриц размерности $m \times n$ (m - число строк матрицы), все строки которых различные и которые содержат на i -ом столбце s_i -единиц для $i = 1, \dots, n$, не пуст. В книге Райзера (2) приводится простой критерий существования $(0,1)$ -матриц с заданным числом единиц на строках и столбцах матрицы.

Другие исследования, содержащиеся в (3), посвящены градиентным алгоритмам синтеза $(0,1)$ -матриц с различными строками, по данному вектору $S = (s_1, \dots, s_n)$.

Приведем некоторые предварительные утверждения, которые легко доказываются.

Лемма 1.1. Пусть $S = (s_1, \dots, s_n), S' = (s'_1, \dots, s'_n)$ два вектора из Ξ_{m+1}^n , причем $s_i \geq m - s_i, s'_i \geq m - s'_i, i = 1, \dots, n$, и $S' < S$. Тогда, если вектор S принадлежит множеству Ψ_{m+1} , то вектор S' также принадлежит множеству Ψ_{m+1} .

2. Пусть $S = (s_1, \dots, s_n), S' = (s'_1, \dots, s'_n)$ два вектора из Ξ_{m+1}^n , причем $s_i \leq m - s_i, s'_i \leq m - s'_i, i = 1, \dots, n$, и $S' > S$. Тогда, если вектор S принадлежит множеству Ψ_{m+1} , то вектор S' также принадлежит множеству Ψ_{m+1} .

Обозначим через ψ_{m+1}^0 и ψ_{m+1}^1 следующие граничные подмножества множества ψ_{m+1} .

$$\psi_{m+1}^0 = \{S \in \psi_{m+1}, \text{ для которых для } \forall R \in \Xi_{m+1}^n, R < S \text{ имеет место } R \in \psi_{m+1}\}$$

$$\psi_{m+1}^1 = \{S \in \psi_{m+1}, \text{ для которых для } \forall R \in \Xi_{m+1}^n, R > S \text{ имеет место } R \in \psi_{m+1}\}$$

Из сказанного по лемме 1 можно убедиться, что $\psi_{m+1}^0 \subseteq M_{m+1}^0$ и $\psi_{m+1}^1 \subseteq M_{m+1}^1$.

Лемма 2. Пусть $S = (s_1, \dots, s_n)$ принадлежит множеству ψ_{m+1} . Тогда $S' = (s_1, \dots, s_{i-1}, m - s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$, $i = 1, \dots, n$, также принадлежит множеству ψ_{m+1} .

Лемма 3.1. Для каждого вектора $S = (s_1, \dots, s_n)$ из множества ψ_{m+1}^1 , $s_i \geq m - s_i$, $i = 1, \dots, n$.

2. Для каждого вектора $S = (s_1, \dots, s_n)$ из множества ψ_{m+1}^0 , $s_i \leq m - s_i$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 1. Пусть вектор $S' = (s'_1, \dots, s'_n)$ принадлежит множеству ψ_{m+1}^1 , и вектор $S'' = (s''_1, \dots, s''_n)$ принадлежит множеству ψ_{m+1}^0 . Тогда $s'_i \geq s''_i$, $i = 1, \dots, n$.

Для каждого вектора $S = (s_1, \dots, s_n)$ из множества Ξ_{m+1}^n обозначим через $\bar{S} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ вектор $(m - s_1, \dots, m - s_n)$.

Следствие 2. Для каждого вектора $S' = (s'_1, \dots, s'_n)$ из множества ψ_{m+1}^1 вектор $\bar{S}' = (\bar{s}'_1, \dots, \bar{s}'_n)$ принадлежит множеству ψ_{m+1}^0 , и наоборот, для каждого вектора $S'' = (s''_1, \dots, s''_n)$ из множества ψ_{m+1}^0 вектор $\bar{S}'' = (\bar{s}''_1, \dots, \bar{s}''_n)$ принадлежит множеству ψ_{m+1}^1 .

Отсюда имеем, что граничные подмножества содержат одинаковое число векторов и являются симметричными по отношению друг к другу подмножествами в $m+1$ -значной решетке. Если вектор $S = (s_1, \dots, s_n)$ из ψ_{m+1}^1 находится на l -ом слое куба, то $\bar{S} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ из ψ_{m+1}^0 будет находиться на $m+1-l$ -ом слое, т.е. на одинаковом расстоянии от последнего и нулевого слоев Ξ_{m+1}^n . То же самое верно и для множеств M_{m+1}^1 , M_{m+1}^0 .

Предположим, что множество ψ_{m+1}^1 состоит из k векторов:
 $\psi_{m+1}^1 = \{S_1, \dots, S_k\}$.

Тогда $\psi_{m+1}^0 = \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k\}$.

Пусть $S \in \psi_{m+1}^1, \bar{S} \in \psi_{m+1}^0$.

Обозначим через $E(S)$ минимальный подкуб, построенный по точкам S и $\bar{S}$

$$E(S) = \{\tilde{S} \in \Xi_{m+1}^n / \bar{S} \leq \tilde{S} \leq S\}.$$

Теорема 1. $\psi_{m+1} = \bigcup_{i=1}^k E(S_i)$.

Таким образом, множество ψ_{m+1} полностью определяется минимальными подкубами, проходящими через соответствующие пары точек из граничных подмножеств. То же самое можно сказать о подкубах, определяемых парами точек из множеств M_{m+1}^1, M_{m+1}^0 , однако последние определяют избыточное покрытие ψ_{m+1} , $\psi_{m+1}^1 \subset M_{m+1}^1$ и $\psi_{m+1}^0 \subset M_{m+1}^0$ в чем легко убедиться, рассмотрев следующий пример:

$$m=14, n=5, S' = (7,10,10,10,10), S'' = (9,10,10,10,10) \in \psi_{15}.$$

Вектор S' принадлежит множеству M_{15}^1 и не принадлежит множеству ψ_{15}^0 , так как $S'' > S'$.

Следовательно, существуют разные монотонные функции с m единицами, характеристические вектора разбиений множества единиц которых сравнимы.

Можно привести ряд дополнительных структурных свойств подмножеств ψ_{m+1}^1 и ψ_{m+1}^0 .

Граничные подмножества $\psi_{m+1}^1(\psi_{m+1}^0)$ симметричны по координатам, т.е. для каждого вектора $S=(s_1, \dots, s_n)$ из множества $\psi_{m+1}^1(\psi_{m+1}^0)$ все векторы, полученные перестановкой координат $S=(s_1, \dots, s_n)$, также принадлежат множеству $\psi_{m+1}^1(\psi_{m+1}^0)$.

Описания множеств ψ_{m+1}^1 при $m=2^{n-1}+1, \dots, 2^n$ полностью определяются описаниями множеств ψ_{m+1}^1 для $m=0, 1, \dots, 2^{n-1}$.

Действительно, если $m \leq 2^{n-1}$ и $S=(s_1, \dots, s_n) \in \psi_{m+1}^1$, то соответствующий ему вектор из множества $\psi_{2^n-m+1}^1$ имеет вид $(2^{n-1}-m+s_1, \dots, 2^{n-1}-m+s_n)$.

Рассмотрим вектор $S \in \psi_{m+1}^1$. В E^n ему соответствует некоторая монотонная булева функция с m единицами. Дополнительное множество к множеству единичных вершин этой монотонной функции

имеет $2^n - m$ вершин и характеристический вектор разбиений $-(2^{n-1} - s_1, \dots, 2^{n-1} - s_n)$. Обращение этих множеств вершин приводит к монотонной булевой функции с $2^n - m$ единицами и с характеристическим вектором $(2^n - m - (2^{n-1} - s_1), \dots, 2^n - m - (2^{n-1} - s_n)) = (2^{n-1} - m + s_1, \dots, 2^{n-1} - m + s_n)$.

Институт проблем информатики и автоматки НАН Армении и
Ереванского государственного университета

Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

E^n -ի ենթաբազմությունների տրոհումների հետ կապված (0,1)-մատրիցների մի դասի մասին

Դիտարկվում է n -չափանի միավոր խորանարդի գագաթների ենթաբազմությունների տրոհումների բնութագրիչ վեկտորների նկարագրման խնդիրը: Հիմնվելով E^n -ում որոշված մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների մեկ կամ զրո արժեքների բազմությունները ներկայացնող ենթաբազմությունների տրոհումների բնութագրիչ վեկտորների ուսումնասիրության վրա, ցույց է տրվում, որ նշված նկարագիրը կարելի է կատարել բազմարժեք բազմաչափ դիսկրետ ցանցի տերմիններով:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л.А.Асланян, Проблемы кибернетики, вып.36, с.85-126 (1979). ² Г.Дж.Райзер, Комбинаторная математика, М., Мир, 1966. ³ А.А.Саакян, ДАН Арм ССР, т.83, 5, с.207-209 (1986).