

УДК 517.1

С. Е. Маркосян

О критических подграфах и критических множествах графа

(Представлено академиком НАН Армении Н.У. Аракеляном 25/ХП 1996)

В работе получено неравенство относительно чисел трансверсальности и независимости для классов критических подмножеств и критических подграфов в графе K_n -е.

Рассмотрим обыкновенный граф, т.е. неориентированный граф $G=(V,E)$ без параллельных ребер и петель.

При изучении совершенных графов и связанной с ними сильной гипотезы Бержа (СГБ) важную роль играют понятия критического ребра и критического множества (1,2), впервые определенные в (3).

Подмножество ребер $E' \subset E$ графа G называется критическим, если $\alpha(G - E') > \alpha(G)$, но $\alpha(G - E'') > \alpha(G)$ для любого $E'' \subset E'$, где $\alpha(H)$ — число независимости графа H . Если $|E'| = 1$, т.е. $E' = \{e\}$ состоит из одного ребра e , то ребро e называется критическим. Ясно, что каждому E' критическому множеству соответствует такое подмножество вершин $S(E')$, $|S(E')| = \alpha + 1$, которое независимо в $G - E'$.

Подграф $G' \subset G$ называется критическим, если $V(G') = V(G)$, $\alpha(G') = \alpha(G)$, и каждое ребро подграфа G' критическое.

Цикл длины n ($n \geq 3$) назовем дыркой, если этот цикл не содержит диагоналей.

Теорема 1. Пусть E' — критическое множество графа G , $S' = S(E')$ — подмножество вершин, соответствующее E' , S — некоторое α -независимое множество ($|S| = \alpha$), тогда подмножество

$V(E') \setminus S$ целиком входят в одну компоненту связности подграфа $G(S \cup S') \setminus E'$.

Доказательство. Предположим, что $H = G(S \cup S') \setminus E'$ и $H_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, компоненты связности графа H . Нетрудно убедиться, что в H имеет место:

1) $v \in S \cap S' \Leftrightarrow v$ — изолированная вершина;

2) $|V_i| > 1 \Leftrightarrow V_i = S_i \cup S'_i, S_i \subset S \setminus S', S'_i \subset S' \setminus S, S_i \neq \emptyset, S'_i \neq \emptyset$.

Так как $|S'| > |S|$, то H имеет такую компоненту связности, которая содержит из S' больше вершин, чем из S . Пусть это H_1 . Тогда $V_1 = S_1 \cup S'_1$ и $|S'_1| > |S_1|$. Обозначим через $U = S'_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$, а через $R = G(U)$ — подграф, порожденный множеством вершин U . Так как $|U| > \alpha$, то R содержит критическое множество. Но $E(R) \subset E'$, а E' — критическое множество, следовательно $E(R) = E'$ и $(V(E') \setminus S) \subset S'_1$, т.е. $(V(E') \setminus S)$ целиком входит в компоненту связности H_1 .

Теорема 1 обобщает результаты о критических ребрах, полученные ранее (3-5), в частности, через два смежных критических ребра в любом графе проходит нечетная дырка.

Теперь дадим определения некоторых понятий, которые необходимы для дальнейшего изложения.

Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G) = \{E_i\}$ класс всех критических множеств, а через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G) = \{F_j\}$ класс всех критических подграфов графа G . Пусть $\mathcal{A} = \{A_r\}$ класс произвольных множеств. Подкласс $\mathcal{A}' = \{A'_r\}$ называется независимым, если множества из $\mathcal{A}'$ попарно не пересекаются. Число независимости $\alpha(\mathcal{A})$ класса $\mathcal{A}$ равно мощности наибольшего независимого подкласса $\mathcal{A}'$, т.е. $\alpha(\mathcal{A}) = \max |\mathcal{A}'|$, где $\max$ берется по всем независимым подклассам. Минимальное (по включению) подмножество T называется трансверсалью класса $\mathcal{A}$, если $T \cap A_r \neq \emptyset$, для $A_r \in \mathcal{A}$. Число трансверсальности $\tau(\mathcal{A})$ класса $\mathcal{A}$ равно мощности наименьшей трансверсали, т.е. $\tau(\mathcal{A}) = \min |T|$, где $\min$ берется по всем трансверсалиям. Из этих определений следует, что

$$\alpha(\mathcal{A}) \leq \tau(\mathcal{A}) \quad (1)$$

для любого класса. В дискретной математике и в комбинаторике ряд известных теорем и принципов равносильны тому, что в (1) имеет

место равенство (теоремы Кенига — Эгервари, Холла, Дилворта, Форда — Фалкерсона и т.д.).

Нетрудно проверить, что следующее следствие теоремы 1: критические ребра в двудольном графе не смежны, равносильно теореме Кенига — Эгервари ⁽⁵⁾, которая в свою очередь равносильна равенству в (1), когда R — класс всех таких двувершинных подмножеств двудольного графа, которые образуют ребро.

Из определений следует, что для любого графа каждое критическое множество является трансверсалью класса $\mathcal{F}$ и каждый критический подграф является трансверсалью класса $\mathcal{E}$, поэтому

$$\tau(\mathcal{E}) = \min |F_j|, F_j \in \mathcal{E},$$

$$\tau(\mathcal{F}) = \min |E_i|, E_i \in \mathcal{F}.$$

Ранее нами были исследованы неравенства

$$\alpha(\mathcal{E}) \leq \tau(\mathcal{E}) \quad (2)$$

$$\alpha(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}) \quad (3)$$

для некоторых классов графов.

Ниже исследованы отношения (2), (3) для графов $G=K_n-e$, где K_n-e n -вершинный полный граф без одного ребра, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$.

Теорема 2. Для графа K_n-e в (2) и (3) имеет место равенство, если $n \leq 5$, и строгое неравенство, если $n > 5$.

Доказательство. 1-й случай. $n \leq 5$. Для этого случая мы приведем таблицу значений $\alpha(\mathcal{E}), \tau(\mathcal{E}), \alpha(\mathcal{F}), \tau(\mathcal{F})$, которую нетрудно проверить.

n	$\alpha(\mathcal{E})$	$\tau(\mathcal{E})$	$\alpha(\mathcal{F})$	$\tau(\mathcal{F})$
2	0	0	0	0
3	1	1	2	2
4	2	2	2	2
5	4	4	2	2

Из таблицы видно, что в (2), (3) имеет место равенство.

2-й случай. $n=6$. Докажем, что

$$\alpha(\mathcal{E}) = 5 < 6 = \tau(\mathcal{E}),$$

$$\alpha(\mathcal{F}) = 1 < 2 = \tau(\mathcal{F}).$$

Критическими множествами графа K_n-e являются порожденные подграфы P_3 трехвершинная цепь, или K_3 трехвершинный полный

подграф, следовательно $\alpha(\mathcal{G}) \leq 6$, так как граф K_6 -е содержит 14 ребер. Если $\alpha(\mathcal{G}) = 6$, то это означало бы, что мы взяли 4 критических множества первого типа и 2 критических множества второго типа, что, нетрудно проверить, невозможно, значит $\alpha(\mathcal{G}) = 5$. Так как $\tau(\mathcal{F}) = \min |E_i|$, а $\min |E_i| = 2$, то $\tau(\mathcal{F}) = 2$.

Критические подграфы, которые состоят из двух полных подграфов, содержат хотя бы 6 ребер (два треугольника), а пятиреберных критических подграфов вообще нет, значит $\min |\mathcal{F}| = 6$ и $\tau(\mathcal{G}) = 6$.

Нетрудно проверить, что каждый критический подграф содержит треугольник, это значит, что любые два критических графа пересекаются, следовательно, $\alpha(\mathcal{F}) = 1$.

3-й случай. $n \geq 7$. Неравенство $\alpha(\mathcal{F}) < \tau(\mathcal{F})$ ($\alpha(\mathcal{F}) = 1$, $\tau(\mathcal{F}) = 2$) доказывается, как в случае 2. Докажем, что $\alpha(\mathcal{G}) < \tau(\mathcal{G})$.

Из теоремы Турана следует, что наименьший критический подграф графа K_n -е состоит из двух компонент связности, каждая из которых является полным подграфом, число вершин которых отличается одно от другого не более чем на 1. Следовательно

$$\tau(\mathcal{G}) = \begin{cases} k(k-1), & \text{если } n = 2k \\ k^2, & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Так как критическими множествами графа K_n -е являются P_3 или K_3 , то

$$\alpha(\mathcal{G}) \leq (n-2) + 1/3(C_n^2 - 1 - 2(n-2)) = 1/6(n^2 + n - 6).$$

Отсюда

$$\alpha(\mathcal{G}) \leq \begin{cases} 1/3(2k^2 + k - 3), & \text{если } n = 2k \\ 1/3(2k^2 + 3k - 2), & \text{если } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\alpha(\mathcal{G}) \leq \tau(\mathcal{G})$, если $n \geq 7$.

В конце статьи отметим, что исследование равенств (2), (3) является новым и важным направлением, где делаются первые шаги. Поэтому полезно было бы изучение этих неравенств для новых классов графов.

Ереванский государственный университет

Դրաֆի կրիտիկական ենթագրաֆների և կրիտիկական բազմությունների մասին

Սույն հոդվածում ընդհանրացված է Բերթի և Լովասի կողմից ստացված հետևյալ թեորեմը՝ կամայական գրաֆում կից կրիտիկական կողերով անցնում է կենտ ցիկլ առանց անկյունագծի: Ստացված են նաև անհավասարություններ, կրիտիկական ենթագրաֆների և կրիտիկական բազմությունների տրանսվերսալություն և անկախության թվերի վերաբերյալ $K_n - e$ գրաֆի համար, որտեղ $(K_n - e)$ -ն n -գագաթների լրիվ գրաֆ է առանց մեկ կողի:

ЛИТЕРАТУРА – ՊՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S.Markossian, J. of Comb. Teory, Ser. B, v.56, №1 (1992). ² A.Sebo, Lab. Artemis, RR 924-M, Nov. 1993. ³ С.Е.Маркосян, ДАН Арм.ССР, т.71, №1 (1975). ⁴ C.Berge, Alternating Chain Methods. A Survey, Graph Theory and Computing, Ed. R. Reed, Acad. Press, N.Y., 1972. ⁵ L.Lovasz, J. Comb. Teory, Ser. B, v.9, №9 (1975).