ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №1

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

В.С.Тоноян, Нарек С.Мелкумян

# Об одной симметричной задаче электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом

(Представлено академиком НАН Армении Г.Е.Багдасаряном 10/IY 1995)

Наличие в реальных материалах дефектов типа трещин, надрезов, узких полостей, инородных включений может привести в некоторых случаях к их быстрому развитию и разрушению всего тела как целого. К настоящему времени достигнут существенный прогресс в исследовании разрушения материалов при действии механических и тепловых нагрузок. Однако разрушение материалов при наличии связанных полей различной природы (например, упругой и электрической) до сих пор изучено недостаточно. В связи с этим представляет интерес распространение методов механики разрушения на пьезоэлектрические материалы ([1]).

Электроупругое состояние пьезокерамической плоскости, поляризованной в направлении оси симметрии с прямолинейной трещиной конечной длины, параллельной оси симметрии, при равномерном растяжении на бесконечности в направлении, перпендикулярном оси трещины, рассмотрено в работе ([1]).

В настоящей работе рассматривается симметричная задача плоской теории электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамической полуплоскости, которая на конечном расстоянии от границы имеет вертикальный полубесконечный разрез. Направление предварительной поляризации перпендикулярно к оси разреза.

Рассмотрим электроупругое состояние плоской деформации пьезокерамической полуплоскости $x \geq 0$, $|z| < \infty$, поляризованной в направлении оси $z$, которая на конечном расстоянии $a$ от горизонтальной границы имеет вертикальный полубесконечный разрез. На границе полуплоскости с вакуумом заданы вектор механических напряжений и нормальная составляющая электрической индукции, а на берегах разреза — нормальное давление и электрический потенциал. Так как задача симметрична относительно вертикального разреза, то можно ограничиться рассмотрением только квадранта $(0<x<\infty\ ,\ 0<z<\infty)$. Известно, что поставленная электроупругая задача математически сводится к решению уравнений равновесия (1.72), электростатики (1.73) и состояния среды (1.74), а также соотношений Коши (1.75) работы ([2]) со следующими граничными условиями ([3]):

$$D_x(0,z)=0\ ;\ \sigma_x(0,z)=f_1(z)\ ;\ \tau_{zx}(0,z)=f_2(z)\ (0<z<\infty); \tag{1}$$

$$\Psi(x,0)=0\ ;\ \tau_{zx}(x,0)=0\ \ (0<x<\infty) \tag{2}$$

$$U_z(x,0)=0\ (0\le x\le a)\ ;\ \ \sigma_z(x,0)=f_3(x)\ (a<x<\infty) \tag{3}$$

где $\sigma_x$, $\tau_{zx}$ — компоненты тензора механических напряжений, $U_x$, $U_z$ — проекции вектора перемещений, $D_x$ — компонент вектора электрической индукции, $\Psi$ — электрический потенциал.

Решения задачи ищем в виде суммы интегралов Фурье:

$$\begin{aligned}
U_x(x,z)&=-\frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\mathrm{Cos}\,\alpha x\,d\alpha+\frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\mathrm{Cos}\,\beta z\,d\beta;\\
U_z(x,z)&=\frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \alpha\overline{W}(\alpha,z)\mathrm{Sin}\,\alpha x\,d\alpha+\frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,x)\mathrm{Sin}\,\beta z\,d\beta;\\
\Psi(x,z)&=-\frac{1}{e_{15}}\int_0^\infty \alpha\overline{\Psi}(\alpha,z)\mathrm{Sin}\,\alpha x\,d\alpha-\frac{1}{e_{15}}\int_0^\infty \beta\overline{\Psi}(\beta,x)\mathrm{Sin}\,\beta z\,d\beta;
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{U}(\alpha,z)&=\sum_{k=1}^{3}t_k\Delta_1(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z};\\
\overline{U}(\beta,x)&=\sum_{k=1}^{3}t_k\Delta_1(t_k)B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x};\\
\overline{W}(\alpha,z)&=\sum_{k=1}^{3}\Delta_2(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z};\\
\overline{W}(\beta,x)&=\sum_{k=1}^{3}\Delta_2(t_k)B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x};\\
\overline{\Psi}(\alpha,z)&=\sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)A_k(\alpha)e^{-\alpha t_k z};\\
\overline{\Psi}(\beta,x)&=\sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)B_k(\beta)e^{-\frac{\beta}{t_k}x};
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $A_k(\alpha)$ и $B_k(\beta)$ — неизвестные функции интегрирований, которые необходимо определить из граничных условий (1)-(3).

$\Delta_1(t_k)$, $\Delta_2(t_k)$, $\Delta_3(t_k)$ определяются по формулам:

$$\Delta_1(t_k)=\kappa t_k^2+\kappa_1\ ;\ \Delta_2(t_k)=\eta t_k^4+\eta_1 t_k^2+1\ ;$$
$$\Delta_3(t_k)=\nu t_k^4+\nu_1 t_k^2+1\ , \tag{6}$$

причем

$$\kappa=(\frac{e_{31}}{e_{15}}+1)\frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}-(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}+1)\frac{e_{33}}{e_{15}};$$
$$\kappa_1=(\frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}-\frac{e_{31}}{e_{15}})\ ;\ \eta=\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\cdot\frac{e_{33}}{e_{15}}\ ;$$
$$\eta_1=(\frac{e_{31}}{e_{15}}+1)(\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E}+\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E})-\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}-\frac{e_{33}}{e_{15}}\ ;\ \nu=\frac{c_{33}^E}{c_{11}^E}\ ; \tag{7}$$
$$\nu_1=(\frac{c_{13}^E}{c_{44}}+1)(\frac{c_{13}^E}{c_{11}^E}+\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E})-\frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}-\frac{c_{33}^E}{c_{44}^E}\ ;$$

а $t_k^2$ — корни бикубического уравнения

$$t^6-Pt^4+Qt^2-R=0\,, \tag{8}$$

где

$$P=(\frac{e_{33}}{c_{44}^E}\eta+\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}\nu)^{-1}\left[(\frac{e_{31}}{c_{11}^E}+\frac{e_{15}}{c_{11}^E})\kappa-\frac{e_{33}}{c_{44}^E}\eta_1+\frac{e_{15}}{c_{44}^E}\eta-\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}\nu_1-\frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}}\nu\right];$$
$$Q=(\frac{e_{33}}{c_{44}^E}\eta+\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}\nu)^{-1}\left[\frac{e_{33}}{c_{44}^E}+\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}-(\frac{e_{31}}{c_{11}^E}+\frac{e_{15}}{c_{11}^E})\kappa_1-\frac{e_{15}}{c_{44}^E}\eta_1-\frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}}\nu_1\right]; \tag{9}$$
$$R=(\frac{e_{33}}{c_{44}^E}\eta+\frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}}\nu)^{-1}(\frac{e_{15}}{c_{44}^E}+\frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}})\,.$$

В этих соотношениях $c_{11}^E$, $c_{13}^E$, $c_{33}^E$, $c_{44}^E$ — модули упругости материала при нулевом электрическом поле, $e_{13}$, $e_{13}$, $e_{13}$ — пьезомодули, $\varepsilon_{11}^s$, $\varepsilon_{33}^s$ — диэлектрические проницаемости при нулевой деформации.

Используя основные соотношения теории электроупругости ([2]) и учитывая (4), (5), можно все компоненты электроупругого поля выразить через $A_k(\alpha)$ и $B_k(\beta)$. Удовлетворив (1) и (2), получим ([4]):

$$B_k(\beta)=-\frac{2}{\pi}\frac{P_{1k}}{\beta^2}\int_0^\infty f_1(t)\mathrm{Cos}\beta t dt-$$
$$-\frac{2}{\pi}\frac{P_{2k}}{\beta^2}\int_0^\infty f_2(t)\mathrm{Sin}\beta t dt+\frac{2}{\pi\beta}\sum_{k=1}^3 P_{3k}\int_0^\infty\frac{\alpha^2A_k(\alpha)}{\alpha^2t_k^2+\beta^2}d\alpha \tag{10}$$
$$A_k(\alpha)=C_k\cdot A_1(\alpha) \tag{11}$$

где $P_{1k}$, $P_{2k}$, $P_{3k}$ и $C_k$ зависят от $t_k$, $\Delta_1(t_k)$, $\Delta_2(t_k)$, $\Delta_3(t_k)$ и физико-механических постоянных материала.

Удовлетворив (3) и учитывая (11), будем иметь:

$$\int_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\mathrm{Sin}\alpha x d\alpha = 0, \qquad 0 \le x \le a;$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\mathrm{Sin}\alpha x d\alpha = m_{11} f_3(x) + \sum_{k=1}^{3} n_{1k} B_k(\beta) e^{-\frac{\beta}{t_k}x} d\beta, \quad a < x < \infty. \tag{12}$$

Решив (12) методом ортогонализации ([5]), будем иметь.

$$A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha}\int_a^\infty r\varphi(r) J_0(\alpha r)dr + \frac{2}{\pi\alpha}\int_a^\infty F(r) J_0(\alpha r)dr, \tag{13}$$

где

$$\varphi(r) = m_{11}\int_r^\infty \frac{f_3(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}dx$$

$$F(r) = r\sum_{k=1}^{3} n_{1k}\int_0^\infty \beta^2 B_k(\beta) K_0\left(\frac{\beta}{t_k}r\right)d\beta, \tag{14}$$

$J_0(\alpha r)$ — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом, $K_0(\frac{\beta}{t_k}r)$ — функции Макдональда $m_{11}$ и $n_{1k}$, зависящие от $t_k$, $\Delta_1(t_k)$, $\Delta_2(t_k)$ и $\Delta_3(t_k)$. Используя (14), (11), (10), выразим $F(r)$ через $A_1(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F(r) = r\varphi^*(r) &+ \frac{2r}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\sum_{k=1}^{3} d_{1k} K_0\left(\frac{r}{t_k}\beta\right)\right]d\beta\int_0^\infty \frac{\alpha^2 A_1(\alpha)}{\alpha^2 t_1^2 + \beta^2}d\alpha + \\ &+ \frac{2r}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\sum_{k=1}^{3} d_{2k} K_0\left(\frac{r}{t_k}\beta\right)\right]d\beta\int_0^\infty \frac{\alpha^2 A_1(\alpha)}{\alpha^2 t_2^2 + \beta^2}d\alpha + \\ &+ \frac{2r}{\pi}\int_0^\infty \beta\left[\sum_{k=1}^{3} d_{3k} K_0\left(\frac{r}{t_k}\beta\right)\right]d\beta\int_0^\infty \frac{\alpha^2 A_1(\alpha)}{\alpha^2 t_3^2 + \beta^2}d\alpha \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (13) в (15), для определения $F(r)$ получаем следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$F(r) = \Omega(r) + \int_a^\infty K(r,\gamma)F(\gamma)d\gamma, \tag{16}$$

где

$$\Omega(r) = -\frac{2r}{\pi m_{22}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{3} b_{4k} m_{k2} K_0\left(\frac{r}{t_k}\beta\right) d\beta \int_0^\infty f_1(t)\cos\beta t\,dt -$$

$$-\frac{2r}{\pi m_{22}} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{3} b_{4k} m_{k3} K_0\left(\frac{r}{t_k}\beta\right) d\beta \int_0^\infty f_2(t)\sin\beta t\,dt + \qquad (17)$$

$$+\frac{4r}{\pi^2}\int_0^\infty \gamma\varphi(\gamma)\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{d_{kj}}{t_j^2}\frac{\ln r/t_k}{\left(\frac{r}{t_k}\right)^2-\left(\frac{\gamma}{t_j}\right)^2}d\gamma;$$

$$K(\gamma,r) = \frac{4r}{\pi^2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{d_{kj}}{t_j^2}\frac{\ln r/t_k}{\left(\frac{r}{t_k}\right)^2-\left(\frac{\gamma}{t_j}\right)^2}d\gamma . \qquad (18)$$

Здесь $d_{kj}$ определено через $\Delta_k(t_k)$ и $t_k$ ; с использованием [5] показано, что (16) можно решить методом последовательных приближений (для пьезокерамики *PZT*-4). Далее, используя (16), (13), (11), (10), (6) и основные соотношения электроупругости [2], можно определить все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости.

Институт механики НАН Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, ՆԱՐԵԿ Ս. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

**Ուղղահայաց կիսաանվերջ ճեղքով պիեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության մի սիմետրիկ խնդրի մասին**

*Աշխատանքում դիտարկվում է նախապես բևեռացված պիեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ սիմետրիկ խնդիր, որը եզրից վերջավոր հեռավորության վրա ունի ուղղահայաց կիսաանվերջ ճեղք: Նախնական բևեռացման ուղղությունը ուղղահայաց է ճեղքի առանցքին:*

*Կիսահարթության եզրի վրա տրված են մեխանիկական լարումների վեկտորը և էլեկտրական ինդուկցիայի նորմալ բաղադրիչը, իսկ ճեղքի եզրի վրա տրված են նորմալ ճնշումը և էլեկտրական պոտենցիալը: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով: Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը բերվել է սկզբում զույգ ինտեգրալ հավասարման, իսկ հետագայում Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:*

*Ցույց է տրված վերջին հավասարման լուծելիությունը: Ստացված են անալիտիկ բանաձևեր ճեղքի շարունակության գծի վրա մեխանիկական նորմալ լարման և էլեկտրական ինդուկցիայի վեկտորի նորմալ բաղադրիչի համար անջատված եզակիությամբ:*

## ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В.З.Партон, Б.А.Кудрявцев*, Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел, М., Изд. Физ.-мат.лит., 1988. [2] *В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга*, Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989. [3] *А.Ф.Улитко*, В кн.: Совр. пробл. механики и авиации, М., с. 290-300, 1982. [4] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.Изд.Физ.-мат.лит.,1971. [5] *В.С.Тоноян., С.А.Мелкумян*. Изв.АН Арм.ССР, т. 24, № 4, с. 1-15,1971.