ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик НАН Армении Л. А. Агаловян, Г. С. Арутюнян

О применимости гипотезы Бернулли для балок с переменными упругими характеристиками

(Представлено 14/III 1996)

Рассматривается определение напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы, когда упругие модули переменны, обсуждается вопрос применимости гипотезы плоских сечений Бернулли в расчетах балок с подобными свойствами. Такая проблема, в частности, возникает в расчетах силиконовых балок и пластин.

Установлены асимптотические порядки компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, выделены факторы, влияющие на применимость гипотезы Бернулли.

1. Для определения напряженно-деформированного состояния изотропных балок в качестве прикладной модели служит классическая теория балок, основанная на известной гипотезе плоских сечений Бернулли. Кирхгофф обобщил эту гипотезу на пластинки (гипотеза недеформируемых нормалей), а Ляв — на оболочки. Доказано, что уравнения классической теории балок можно получить из уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования, а точное решение проблемы складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя. Принимая гипотезу плоских сечений Бернулли, пренебрегают пограничным слоем, а решение внутренней задачи определяется лишь приближенно ([1]). Работа преследует цель — вывести такие уравнения для балок-полос, которые учитывали бы зависимость упругих модулей от координат точек (этим свойством, в частности, обладают балки и пластины, состоящие из искусственно выращиваемых кристаллов ([2])), а также выяснить возможность использования гипотезы плоских сечений в расчетах таких конструктивных элементов.

Требуется определить решение плоской задачи теории упругости ортотропного тела в области $\Omega=\{x,y\colon x\in[0,l],\ -h\le y\le h,\ h<<l\}$, когда модули упругости являются функциями от координат точек, на продольных краях $y=\pm h$ заданы компоненты внешней нагрузки

$$\sigma_{xy} = \pm\varepsilon^{-1} q_x^{\pm}(x)\,,\ \sigma_y = \pm q_y^{\pm}(x)\,, \tag{1.1}$$

а при $x = 0, l$ — произвольные пока условия краевых задач теории упругости. Введем безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$ и безразмерные компоненты вектора перемещения $U=u/l$, $V=v/l$. Уравнения задачи примут вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\zeta} = 0\,,\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\zeta} - \varepsilon^{-1}(\rho hg) = 0\,,$$

$$E_1\frac{\partial U}{\partial\xi} = \sigma_x - \nu_{12}\sigma_y\,,\ \varepsilon^{-1}E_2\frac{\partial V}{\partial\zeta} = \sigma_y - \nu_{12}\sigma_x\,, \tag{1.2}$$

$$G_{12}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\xi}\right) = \sigma_{xy}\,,\ \varepsilon = h/l\,,$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, $E_i = E_i(\xi,\zeta)$ — модуль Юнга, $G_{12} = G_{12}(\xi,\zeta)$ — модуль сдвига, $\nu_{ik} = \nu_{ik}(\xi,\zeta)$ — коэффициент Пуассона, $\rho = \rho(\xi,\zeta)$ — плотность, g — ускорение силы тяжести. Система (1.2) сингулярно возмущена малым параметром ε. Ее решение складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя ([1,3,4]). Решением внутренней задачи является

$$\sigma_x = \varepsilon^{-2+s}\sigma_x^{(s)}\,,\ \sigma_{xy} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{xy}^{(s)}\,,\ \sigma_y = \varepsilon^{s}\sigma_y^{(s)}\,,$$

$$U = \varepsilon^{-2+s}U^{(s)}\,,\ V = \varepsilon^{-3+s}V^{(s)}\,,\ s = \overline{0,N}\,, \tag{1.3}$$

где $s = \overline{0,N}$ означает, что по немому индексу s происходит суммирование от 0 до N. После подстановки асимптотического представления (1.3) в (1.2) и приравнения коэффициентов при соответствующих степенях ε, получим систему относительно $\sigma_x^{(s)}$, $\sigma_{xy}^{(s)}$, $\sigma_y^{(s)}$, $U^{(s)}$, $V^{(s)}$. Решив эту систему и удовлетворив граничным условиям (1.1), получим:

$$V^{(s)} = v^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$U^{(s)} = -\frac{dv^{(s)}}{d\xi}\zeta + u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_x^{(s)} = E_1(\xi,\zeta)\left[-\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\zeta + \frac{du^{(s)}}{d\xi}\right] + \sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[I_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right] - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[I_0\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right] + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(s)} = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[I_2\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[I_3\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right] - \frac{d\sigma_{xy0}^{(s)}}{d\xi}\zeta + \sigma_{y0}^{(s)}(\xi) + \sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(I_4 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left(I_5 \frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$\sigma_{y0}^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}\left(q_y^{+(s)} - q_y^{-(s)}\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(I_6 \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(I_7 \frac{du^{(s)}}{d\xi}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_y^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

где

$$I_0 = \int_0^{\zeta} E_1(\xi,\zeta)d\zeta\,,\ I_1 = \int_0^{\zeta} \zeta E_1(\xi,\zeta)d\zeta$$

$$I_2 = \int_0^{\zeta}\left(\int_0^{\zeta} E_1 \zeta d\zeta\right) d\zeta\,,\ I_3 = \int_0^{\zeta}\left(\int_0^{\zeta} E_1 d\zeta\right) d\zeta$$

$$I_4 = \int_0^{1} \zeta E_1(\xi,\zeta)d\zeta - \int_{-1}^{0} \zeta E_1(\xi,\zeta)d\zeta$$

$$I_5 = \int_0^{1} E_1 d\zeta - \int_{-1}^{0} E_1 d\zeta\,,\ I_6 = \int_0^{1}\left(\int_0^{\zeta} \zeta E_1 d\zeta\right) d\zeta - \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{\zeta} \zeta E_1 d\zeta\right) d\zeta$$

$$I_7 = \int_0^{1}\left(\int_0^{\zeta} E_1 d\zeta\right) d\zeta - \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{\zeta} E_1 d\zeta\right) d\zeta$$

$$q_x^{\pm(0)} = q_x^{\pm}\,,\ q_y^{\pm(0)} = q_y^{\pm}\,,\ q_x^{\pm(s)} = q_y^{\pm(s)} = 0\,,\ s \neq 0 \qquad (1.5)$$

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta} \frac{1}{E_2(\xi,\zeta)}\left(\sigma_y^{(s-4)} - \nu_{21}(\xi,\zeta)\sigma_x^{(s-2)}\right) d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\left(\frac{1}{G_{12}(\xi,\zeta)}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi}\right) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \nu_{12}(\xi,\zeta)\sigma_y^{(s-2)} + E_1(\xi,\zeta)\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\int_0^{\zeta} \sigma_x^{*(s)} d\zeta\right)$$

$$\sigma_y^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\int_0^{\zeta} \sigma_{xy}^{*(s)} d\zeta\right) + g\int_0^{\zeta} \rho^{(s)} d\zeta\,;\ \rho^{(0)} = h\rho\,,\ \rho^{(s)} = 0\,,\ s \neq 0\,,$$

функции $u^{(s)}, v^{(s)}$ определяются из системы

$$\frac{d}{d\xi}\left(I_{11}\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)-\frac{d}{d\xi}\left(I_{01}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)}$$
$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)+\frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_2\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_y^{(s)} \tag{1.6}$$

где

$$I_{11}=\int_{-1}^{1}\zeta E_1 d\zeta\ ,\ \ I_{01}=\int_{-1}^{1}E_1 d\zeta$$
$$a_1=\int_{0}^{1}\zeta E_1 d\zeta-\int_{-1}^{0}\zeta E_1 d\zeta-\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\zeta}\zeta E_1 d\zeta\right)d\zeta$$
$$a_2=\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\zeta}E_1 d\zeta\right)d\zeta-\int_{0}^{1}E_1 d\zeta+\int_{-1}^{0}E_1 d\zeta \tag{1.7}$$
$$F_x^{(s)}=q_x^{+(s)}+q_x^{-(s)}-\left[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)-\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]$$
$$F_y^{(s)}=q_y^{+(s)}+q_y^{-(s)}+\frac{d}{d\xi}\left(q_x^{+(s)}-q_x^{-(s)}\right)-\left[\sigma_{y}^{*(s)}(\zeta=1)-\sigma_{y}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]-$$
$$-\frac{d}{d\xi}\left[\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]$$

Определив из системы (1.6) функции $u^{(s)}, v^{(s)}$, по формулам (1.3), (1.4) определяются все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной асимптотической точностью.

2. В ряде случаев система (1.6) принимает упрощенный вид. Например, если $E_i=\text{const}$, $G_{ik}=\text{const}$, $\nu_{ik}=\text{const}$, имеем

$$-2E_1\frac{d^2u^{(s)}}{d\xi^2}=F_x^{(s)},$$
$$\frac{2}{3}E_1\frac{d^4v^{(s)}}{d\xi^4}=F_y^{(s)}. \tag{2.1}$$

Вернувшись к размерным величинам, можно убедиться, что первое из уравнений (2.1) совпадает с классическим уравнением растяжения-сжатия стержней ([5]), а второе — с уравнением изгиба балок ([6]). Для каждого приближения меняются лишь $F_x^{(s)}, F_y^{(s)}$. Гипотезе плоских сечений Бернулли соответствуют приближения $s=0,1$, остальные приближения уточняют результаты по классической теории.

Если E_1 четная функция от ζ, т.е. $E_1(\xi,-\zeta)=E_1(\xi,\zeta)$, система (1.6) принимает вид

$$-\frac{d}{d\xi}\left(I_{01}\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)},$$
$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(a_1\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)=F_y^{(s)}. \tag{2.2}$$

В смысле приложений важен также случай $E_1 = E_1(\xi)$. Имеем

$$-2\frac{d}{d\xi}\left(E_1(\xi)\frac{du^{(s)}}{d\xi}\right)=F_x^{(s)},$$
$$\frac{2}{3}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(E_1(\xi)\frac{d^2v^{(s)}}{d\xi^2}\right)=F_y^{(s)}. \tag{2.3}$$

Таким образом, если модуль Юнга E_1 не зависит от координаты ζ или есть четная функция, система (1.6) распадается на два отдельные уравнения, первое из которых есть уравнение растяжения-сжатия стержней, а второе — уравнение изгиба балок. Для приближений $s=0,1$ (в рамках справедливости гипотезы плоских сечений) эти уравнения независимы. При $s\geq 2$ уравнения системы (1.6) должны быть решены совместно, поскольку $F_x^{(s)}$ будет содержать слагаемые, обусловленные изгибом, а $F_y^{(s)}$ — слагаемые, вызванные растяжением-сжатием. Если отсутствует симметрия, то задачи растяжения-сжатия и изгиба не разделяются и $u^{(s)}, v^{(s)}$ должны быть определены из системы (1.6), однако и в этом случае, как следует из (1.4), приближения $s=0,1$ соответствуют гипотезе плоских сечений. Гипотеза плоских сечений Бернулли перестанет быть верной, если поправка от приближения $s=2$ по сравнению с данными для $s=0,1$ будет одного и того же порядка. Например, если $E_1 = E_1(\xi)$ и полоса Ω растягивается равномерно распределенной по торцам нагрузкой с равнодействующей P, используя (1.3)-(1.5), (2.3) получим

$$\sigma_x=\frac{P}{2h}+\frac{P}{4h}\varepsilon^2\left(\zeta^2-\frac{1}{3}\right)\overline{E}_1(\xi),$$
$$\sigma_{xy}=\frac{P}{12h}\varepsilon^3\zeta\left(1-\zeta^2\right)\frac{d\overline{E}_1}{d\xi},$$
$$\sigma_y=\frac{P}{48h}\varepsilon^4\left(1-2\zeta^2+\zeta^4\right)\frac{d^2\overline{E}_1}{d\xi^2}, \tag{2.4}$$
$$\overline{E}_1(\xi)=E_1(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{\nu_{21}(\xi)}{E_2(\xi)}\right).$$

Гипотеза Бернулли будет не применима к указанному классу задач, если $\overline{E}_1(\xi) = 0(\varepsilon^{-2})$.

В случае балок с шарнирным опиранием главную роль играют величины

$$E_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1-2\xi}{G_{12}(\xi)}\right),\ E_1(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\frac{\xi(1-\xi)\nu_{21}(\xi)}{E_2(\xi)}\right] \tag{2.5}$$

и их производные.

В заключение отметим, что, ограничившись решением (1.3)-(1.5), граничным условиям при $x = 0, l$, как и в классической теории, можно удовлетворять лишь интегрально. Для поточечного удовлетворения этим условиям необходимо привлекать решение пограничного слоя. Погранслой можно строить изложенным в [1,7] способом.

Авторы весьма признательны проф. Армену Тер-Кюрегяну (Беркли, США), привлекшему внимание авторов к этой проблеме.

Институт механики НАН Армении
Нагорно-Карабахский государственный университет

Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Գ. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Առաձգականության փոփոխական բնութագրիչներ ունեցող հեծանների համար Բեռնուլիի վարկածի կիրառելիության մասին

Դիտարկված է օրթոտրոպ շերտ-հեծանի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը, երբ շերտի նյութի առաձգականության մոդուլները փոփոխական են: Նման խնդիր մասնավորապես առաջանում է արհեստական բյուրեղների աճեցման եղանակով գերճշգրիտ սարքաշինության մեջ օգտագործվող հեծանների և սալերի հաշվարկներում: Կառուցված է առաձգականության մաթեմատիկական տեսության համապատասխան եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը, որոշված են լարումների տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների ասիմպտոտիկ կարգերը, ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր նշված մեծությունները որոշելու համար: Ուսումնասիրված է Բեռնուլիի հարթ կտրվածքների վարկածի կիրառելիության հնարավորությունը նման հեծանների հաշվարկներում: Կախված արտաքին բեռի փոփոխելիությունից և առաձգականության մոդուլների հարաբերակցությունից արտածված են պայմաններ, երբ Բեռնուլիի վարկածը կիրառելի չէ:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Агаловян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 30, № 5 (1977). [2] *L. O'Connor*, Mechanical Engineer, February, 1992. [3] *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., Наука, 1973. [4] *А. Х. Найфе*, Методы возмущений, М., Мир, 1976. [5] *А. П. Филин*, Прикладная механика твердого деформируемого тела, т. 1, М., Наука, 1975. [6] *С. П. Тимошенко*, Сопротивление материалов, т. 1, М., Наука, 1965. [7] *Л. А. Агаловян*, ДАН АрмССР, т. 45, № 3 (1972).