УДК 512.542

В. Г. Микаелян

О тождествах расширений абелевых групп

(Представлено академиком НАН Армении А. Б. Нерсисяном 8/IV 1996)

Тесная взаимосвязь между группами и их тождествами наводит на целесообразность изучения тождеств расширений групп с точки зрения тождеств групп, участвующих в расширении. (Основные определения см. в (1,2)). Пусть R есть расширение H посредством G . Если

$$V = \text{Var } H, \quad U = \text{Var } G$$

есть многообразия, порожденные группами H и G , а V, U — соответствующие вербальные подгруппы в свободной группе $F = F_\infty$, то всегда: $R \in V \cdot U$ (произведение многообразий см. (1,3)).

$V \cdot U$ имеет вербальной подгруппой в F группу $V(U) < F$, т.е. всевозможные подстановки тождеств группы G в тождества H являются тождествами для R . Однако не всегда это свойство обратимо, т.е. R может удовлетворять "дополнительному" тождеству $w \equiv 1$, не лежащему в $V(U)$.

В (4) мы получили целый ряд конкретных примеров, позволяющих строить расширения R с указанным свойством (см.(4), примеры 1-4).

В (5) мы получили теоремы, позволяющие строить широкие классы таких примеров. В этих примерах разность тождеств расширений R от $V(U)$ достигалась на путях доказательства строгости включений

$$V \circ G \subseteq V \cdot \text{Var } G, \tag{1}$$

$$H \circ U \subseteq \text{Var } H \cdot U. \tag{2}$$

Здесь $V \circ G$ — многообразие, порожденное всевозможными расширениями групп из V посредством G , $H \circ U$ — многообразие, порожденное всеми расширениями группы H посредством групп из U .

Во всех указанных примерах и теоремах одна из групп (и порожденных им многообразий) H или G существенно предполагалась неабелевой. Рассмотрим случай, когда H и G — абелевы. Для абелевой группы A обозначим через A_i ее i -ый слой (7), т.е. ее подгруппу:

$$gp\{x \in A \mid x^i = 1\}.$$

Если A имеет конечную экспоненту $\text{exp } A$ и $p \mid \text{exp } A$ (p – простое число), то введем функцию $k(p) = k(p, A)$, таким образом: $p^{k(p)} \mid \text{exp } A$, но $p^{k(p)+1} \nmid \text{exp } A$.

Теорема 1. Пусть абелевы группы H, G имеют периоды, соответственно m, n . Если существует простое p , делящее m, n , такое, что мощность фактора

$$G_{p^{k(p)}} / G_{p^{k(p)-1}}$$

конечна, то любое расширение R группы H посредством G удовлетворяет некоторому тождеству $w \equiv 1$, которое не лежит в $V(U)$.

Как видим, теорема 1 позволяет легко конструировать расширения как конечные, так и бесконечные и бесконечно порожденные.

Следствие 1. Если H, G абелевы группы конечных не взаимно простых экспонент, причем G – конечна, то любое расширение H посредством G обладает "дополнительным" тождеством.

Теорема 2. а) Если H, G, m, n те же, что и в теореме 1, H – конечна, то расширения R (группы H посредством G) имеют "дополнительные" тождества, коль скоро существует простое p , делящее m, n , такое, что степени неприводимых представлений группы Z_n над полем $F_p \cong Z_p$ больше чем

$$\omega(p, H) = \log_p \left| H_{p^{k(p)}} / H_{p^{k(p)-1}} \right|.$$

б) Если H такая же, что и выше, G абелева группа бесконечного периода, то всякое расширение группы H посредством G имеет тождество, не лежащее в $V(U)$.

При условии $|H| < \infty$ теорема 2 позволяет строить примеры с нужным свойством даже для групп G с порядком взаимно простым с $|H|$. Теорема 1 является следствием теоремы 1 из (6) и замечаний, сделанных выше. Теорема 2 является следствием следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть H – конечная абелева группа периода $m > 1$ и для каждого простого p , делящего m , число $k(p) = k(p, H)$ определяется как и выше: $p^{k(p)} \mid m$, $p^{k(p)+1} \nmid m$. Тогда

а) равенство

$$H \circ A_n = \text{Var } H \cdot A_n = A_m \cdot A_n$$

имеет место тогда и только тогда, когда $(m, p) = 1$ и для любого простого p , делящего m , степень неприводимых представлений группы Z_m над полем $F_p \cong Z_p$ не больше чем

$$\omega(p, H) = \log_p \left| H_{p^{k(p)}} / H_{p^{k(p)-1}} \right|.$$

б) Всегда имеет место неравенство

$$H \circ A \neq \text{Var } H \cdot A (= A_m \cdot A).$$

Доказательство теоремы 3 основано на следующих леммах:

Лемма 1. Если $|H| < \infty$ и

$$H \circ A_m = \text{Var } H \cdot A_m,$$

то период группы H взаимно прост с m .

Лемма 2. Пусть $q_1, \dots, q_t$ есть все простые делители числа m ;

$$q_i^{\beta(i)} | m, \text{ но } q_i^{\beta(i)+1} \nmid m.$$

$\text{Var } H = A_{m_1} \cdot \dots \cdot A_{m_s}$, $p_1, \dots, p_s$ — все простые делители числа m . $H(p_j)$ есть p_j -компонента (?) группы H . Тогда для выполнения равенства

$$H \circ U = \text{Var } H \cdot U$$

необходимо, чтобы $(m, p) = 1$ и для любой пары i, j выполнялись равенства

$$H(p_j) \circ A_{q_i^{\beta(i)}} = A_{p_j^{\alpha(j)}} \cdot A_{q_i^{\beta(i)}},$$

где $p_j^{\alpha(j)}$ есть период группы $H(p_j)$.

Лемма 3. Если H есть конечная абелева группа периода p^α , то для равенства

$$H \circ A_{q^\beta} = A_{p^\alpha} \cdot A_{q^\beta},$$

необходимо и достаточно, чтобы в многообразии $H \circ A_{q^\beta}$ содержалось $\alpha \cdot \beta$ подмногообразий, содержащих $A_{p^\alpha q^\beta}$.

Лемма 4. Если $p \nmid N$ и $\alpha > \gamma$ ($\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$), то для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$Z_{p^\alpha}^k \circ A_N \subseteq Z_{p^\gamma}^k \circ A_N.$$

Лемма 5. Пусть p, q — различные простые числа, тогда

$$Z_{p^\alpha}^k \circ A_{q^\beta} = A_{p^\alpha} \cdot A_{q^\beta}$$

тогда и только тогда, когда

$$q^{\beta} \prod_{i=1}^k (p^k - 1).$$

Лемма 6. Пусть H есть группа вида

$$H = Z_{p^{\alpha_1}}^{k_1} + Z_{p^{\alpha_2}}^{k_2} + \dots + Z_{p^{\alpha_s}}^{k_s},$$

где $k(p) = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s$; тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ равенств

$$H \circ A_n = \text{Var } H \cdot A_n = A_{p^{\alpha_1}} \cdot A_n$$

имеет место тогда и только тогда, когда $p \mid n$ и k не меньше чем максимальная степень неприводимого представления группы Z_p над полем F_p .

В заключение автор хочет выразить свою самую искреннюю благодарность А. Ю. Ольшанскому за постановку вопроса и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Հ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Արեւյան խմբերի ընդլայնումների նույնությունների մասին

Շարունակելով խմբերի ընդլայնումները՝ ընդլայնմանը մասնակցող խմբերի նույնությունների տեսակետից ուսումնասիրելու թեման, հեղինակը քննարկում է արեւյան խմբերի ընդլայնումների նույնությունները: Մասնավոր ուշադրություն է դարձվում դեպքերի քննարկությանը, երբ մի արեւյան խմբի բոլոր ընդլայնումները մի այլ արեւյան խմբի միջոցով բավարարում են մի որևէ հավելյալ նույնության: Այսինքն մի այնպիսի նույնության, որը տեղի ունի ընդլայնման մեջ, բայց նույնությունն չէ ընդլայնմանը մասնակցող խմբերով ծնված բազմաձևությունների արտադրյալի համար: Ծնթադրենք R խումբը H խմբի ընդլայնումն է G խմբի միջոցով: V -ն և U -ն H, G խմբերով ծնված բազմաձևություններին համապատասխան վերբայան ենթախմբերն են անվերջ ունեցի ազատ խմբում: Այդ դեպքում նշված բազմաձևությունների արտադրյալին համապատասխան վերբայան ենթախումբն է $V(U)$:

Մենք, մասնավորապես կարող ենք ապացուցել, որ եթե H և G արեւյան խմբերը ունեն համապատասխանաբար m և n պարբերությունները և եթե գոյություն ունի պարզ p , բաժանող m -ն և n -ը, այնպիսին որ $G_{p^{m(n-1)}} / G_{p^{m(n-1)}}$ ֆակտոր խումբը վերջավոր է, ապա H -ի կամայական ընդլայնում G -ի միջոցով ունի մի հավելյալ նույնություն (որը, իհարկե, չի պատկանում $V(U)$ -ին):

ЛИТЕРАТУРА - ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ X. Нейман, Многообразия групп, М., Мир, 1969. ² B. Neumann, Math. Ann., v. 114, p. 506-525 (1937). ³ B. Neumann, H. Neumann, P. Neumann, Math. Z., v. 80, p. 44-62 (1962). ⁴ В. Г. Микаелян, ДНАН Армении, т. 94, № 3, с. 277-280 (1993). ⁵ В. Г. Микаелян, ДНАН Армении, т. 95, № 2, с. 72-75 (1995). ⁶ В. Г. Микаелян, Материалы III Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова, с. 228, 1993. ⁷ А. Г. Курош, Теория групп, М., Наука, 1967.