ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Г.В.Микаелян, З.С.Микаелян

Вполне монотонность одного класса функций типа Миттаг-Леффлера

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Захаряном 1/VII 1996)

1. Класс целых функций

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})},\ 0<\rho<+\infty,\ -\infty<\mu<+\infty, \tag{1}$$

порядка ρ и типа 1, где $\Gamma(\bullet)$ — гамма-функция Эйлера, — основа целого направления в гармоническом анализе[1].

Функция $E_\rho(-x,\mu)$, в случае $\rho\geq 1$, $x\geq 0$, вполне монотонна тогда и только тогда, когда $\mu\geq\rho^{-1}$ [2]. В частности, функция Миттаг-Леффлера $E_\rho(-x,1)$ вполне монотонна при $\rho\geq 1$ [3,4].

Вполне монотонность функции $\varphi(x)$, $x\in[0,\infty)$, означает ее бесконечную дифференцируемость и выполнение условий

$$(-1)^n\varphi^{(n)}(x)\geq 0$$

для всех $x\geq 0$ и целых $n\geq 0$.

С точки зрения теории вероятностей вполне монотонность функции $\varphi(x)$ эквивалентна существованию распределения $F(t)$, сосредоточенного на $[0,+\infty)$ такого, что

$$\varphi(x)=\int_0^\infty e^{-xt}dF(t)\ [5].$$

Поэтому обоснован интерес специалистов по теории вероятностей к функциям типа Миттаг-Леффлера.

Естественным обобщением класса функций (1) служит следующий класс функций [6,7].

Пусть $p \geq 1$ заданное целое число, положительные числа $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_p$ и $w_1, \dots, w_p$ удовлетворяют условию

$$w_1^{-1} + \dots + w_p^{-1} < \rho_0^{-1} + \dots + \rho_p^{-1}, \tag{2}$$

а $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p$ и $\nu_1, \dots, \nu_p$ — действительные числа.

Рассмотрим класс функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho,w}(z,\mu,\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\mu_0 + \frac{k}{\rho_0})} \prod_{m=1}^{p} \frac{\Gamma(\nu_m + \frac{k}{w_m})}{\Gamma(\mu_m + \frac{k}{\rho_m})} z^k . \tag{3}$$

Условие (2) обеспечивает сходимость ряда (3).

Нетрудно проверить, пользуясь формулой Стирлинга, что введены целые функции порядка и типа

$$\chi = \frac{1}{\rho_0^{-1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\rho_k^{-1} - w_k^{-1}\right)}, \quad \sigma = \frac{1}{\chi} \left(\rho_0^{\rho_0^{-1}} \prod_{k=1}^{p} \frac{\rho_k^{\rho_k^{-1}}}{w_k^{w_k^{-1}}} \right)$$ соответственно.

Цель настоящей заметки заключается в установлении следующего факта.

Т е о р е м а. *Функция* $E_{\rho,w}(-x,\mu,\nu)$ *с* $\rho_0 \geq 1$, $x \geq 0$ *вполне монотонна тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\mu_0 \geq \rho_0^{-1}, \ \rho_k \geq w_k, \ \nu_k > 0, \ (\mu_k / \nu_k) \geq (w_k / \rho_k), \ k = \overline{1,p}. \tag{4}$$

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\Gamma(z+1) = e^{-cz} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1 + (z/k)},$$

где $c = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln n \right)$ — постоянная Эйлера, и мероморфную функцию

$$\gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{z}{\rho_0})} \prod_{k=1}^{p} \frac{\Gamma(\nu_k + \frac{z}{w_k})}{\Gamma(\mu_k + \frac{z}{\rho_k})},$$

которая аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -m$, где

$$m = \min(1, \ \nu_k w_k; \ 1 \leq k \leq p) .$$

Лемма. *При выполнении условий (4) найдется неубывающая функция $\beta(x)$, $-\infty < x < +\infty$, такая, что*

$$\gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} d\beta(x), \ \operatorname{Re} z > -m. \tag{5}$$

Доказательство. Введем функции

$$\alpha_{k_0}(x) = \frac{k + \mu_0 - 1 + (x / \rho_0)}{k + x}, \ \alpha_{ki}(x) = \frac{k + \mu_i - 1 + (x / \rho_i)}{k + \nu_i - 1 + (x / w_i)}, \ i = \overline{1, p}, \ x \geq 0.$$

Поскольку функции $\alpha_{ki}(x)$ при всех k и i вполне монотонны, то вполне монотонна также и функция

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{p} \alpha_{ki}(x) \text{ при всех } n \geq 1.$$

Следовательно, по теореме Бернштейна найдутся неубывающие функции $\mu_n(x)$ такие, что

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{p} \alpha_{ki}(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-xu} d\mu_n(x) \text{ при всех } n \geq 1. \tag{6}$$

Более того, доопределяя функции $\mu_n(x)$ в (6) на полуоси $-\infty < x < 0$ как $\mu_n(x) = \mu_n(0)$, сохраняем равенство (9) с пределами интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$.

Для любого $\lambda > 0$ и всех $x \geq 0$

$$n^{x\lambda} = e^{x\lambda \ln n} = \int_{-\infty}^{0} e^{-xu} d \operatorname{sgn}(u - \lambda \ln n), \tag{7}$$

причем предел интегрирования 0 можно заменить на $+\infty$.

Таким образом, функции

$$\gamma_n(x) = n^{\lambda_1 + x\lambda_2} \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{p} \alpha_{ki}(x) \quad \text{при всех } n \geq 1,$$

где

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{p} \nu_i - \sum_{i=0}^{p} \mu_i + 1, \ \lambda_2 = \sum_{i=0}^{p} \rho_i^{-1} - \sum_{i=1}^{p} w_i^{-1},$$

согласно (6) и (7), представимы в виде

$$\gamma_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} d\beta_n(u), \ d\beta_n(u) \geq 0. \tag{8}$$

Здесь функции $\beta_n(u)$ суть свертки функций $n^{\lambda_1} \mu_n(u)$ и $\operatorname{sgn}(u - \lambda_2 \ln n)$.

Легко заметить, что $\gamma_n(x)$ — "усечение" функции $\gamma(x)$. Более того $\gamma_n(x)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к $\gamma(x)$ на любом компакте, не содержащем полюсов функции $\gamma(x)$.

Следовательно, доказано представление (5) для всех $x \geq 0$. Из теоремы Виванти—Прингсгейма—Ландау следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Из леммы вытекают формулы

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{x}{\rho_0})} \prod_{k=1}^{p} \frac{\Gamma(\nu_k + \frac{x}{w_k})}{\Gamma(\mu_k + \frac{x}{\rho_k})} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu} d\beta(u) \qquad (9)$$

для всех $x \geq 0$, где функция $\beta(u)$ та же, что и в (5).

Замена переменной в $e^{-x} = \tau$ в (9) и последующая замена непрерывного x на дискретную n решает следующую проблему моментов Стилтьеса:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{n}{\rho_0})} \prod_{k=1}^{p} \frac{\Gamma(\nu_k + \frac{n}{w_k})}{\Gamma(\mu_k + \frac{n}{\rho_k})} = \int_{0}^{+\infty} \tau^n d\omega(\tau) \ ,$$

где $d\omega(\tau) \geq 0$, что равносильно вполне монотонности функции $E_\rho(-x, \mu, \nu)$.

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Զ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների մի դասի լիովին մոնոտոնությունը

Աշխատանքում դիտարկվում է Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների մի դաս, որը հանդիսանում է Միտտագ-Լեֆլերի ֆունկցիաների լայն ընդհանրացում: Մոմենտների մեթոդի միջոցով ստացված են այդ դասի ֆունկցիաների լիովին մոնոտոնության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян,* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966. [2] *М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян,* Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. 10, № 6, с. 483-508 (1975). [3] *H. Pollard,* Bul. Amer. Math. Soc., v. 54, p. 1115-1116 (1948). [4] *A. Wintner,* J. de Mathem. pures et appliqees, p. 165-182 (1959). [5] *В. Феллер,* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., Мир, 1984. [6] *C. Fox,* Proc. of the Lond. Math. Soc., v. 27, p. 389-400 (1928). [7] *С. А. Акопян,* Изв. АН АрмССР, Математика, т. 15, № 1, с. 13-36 (1962).