ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

М.Г.Нагапетян, В.Г.Ушаков

Обратные задачи в некоторых одноканальных системах

(Представлено академиком НАН Армении Р.Р.Варшамовым 26/VI 1996)

1. Рассматриваются: а) модель $M|G|1|\infty$ с параметром $a>0$ поступления и с функцией распределения (ФР) $B(x), B(+0)=0$, времен обслуживания, $\beta(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dB(x)$, $\beta_1=\int\limits_0^\infty xdB(x)$, $a\beta_1<1$. Дисциплины обслуживания FIFO и LIFO; б) модель $GI|M|1|\infty$ с ФР $A(x), A(+0)=0$, рекуррентного потока и с параметром $b>0$ обслуживания, $\alpha(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dA(x)$, $\alpha_1=\int\limits_0^\infty x^1dA(x)$, $\alpha_1\beta>1$. Дисциплины обслуживания FIFO и LIFO; в) модель $M_r|G_r|1|\infty$ с параметрами $a_1>0,\dots,a_r>0$ поступления и с ФР $B_1(x),\dots,B_r(x)$ времен обслуживания вызовов приоритетов $1,\dots,r$ (1-вызовов,....., r-вызовов), $B_i(+0)=0$, $\beta_i(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}dB_i(x)$, $\beta_{i1}=\int\limits_0^\infty xdB_i(x)$, $i=\overline{1,r}$. Дисциплина обслуживания — абсолютный приоритет. Разновидности — дообслуживание, обслуживание заново, потеря прерванного вызова. Внутри потоков — дисциплина FIFO. Загрузка первыми i потоками — ρ_{i1} (см.([1])) и $\rho_{r1}<1$. Пусть $f(s)$ и $v(s)$ — преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) от стационарных ФР выходящего потока и виртуального времени пребывания вызова. В модели $M|G|1|\infty$ ([2])

$$f(s)=\left[a\beta_1+(1-a\beta_1)\frac{a}{s+a}\right]\beta(s), \tag{1}$$

$$v(s)=\begin{cases}\dfrac{(1-a\beta_1)s\beta(s)}{s-a+a\beta(s)}, & \text{FIFO},\\ \left[(1-a\beta_1)+\dfrac{a(1-\pi(s))}{s+a-a\pi(s)}\right]\beta(s), & \text{LIFO},\end{cases} \tag{2}$$

где $\pi(s)$ — решение уравнения $\pi(s)=\beta(s+a-a\pi(s))$. В модели $GI|M|1|\infty$ [2]

$$f(s)=\left[\rho-b(1-\rho)\frac{\alpha(s)-\rho}{s-b(1-\rho)}\right]\frac{b}{s+b}, \tag{3}$$

$$v(s)=\begin{cases}\dfrac{b(1-\rho)}{s+b(1-\rho)}, & \text{FIFO},\\ v(s)=\left[1-\rho+\rho\pi(s)\right]\dfrac{b}{s+b}, & \text{LIFO},\end{cases} \tag{4}$$

где $\pi(s)=\dfrac{b[1-\gamma(s)]}{s+b[1-\gamma(s)]}$, $\gamma(s)=\alpha(s+b-b\gamma(s))$, $\rho=\gamma(0)$. Пусть $f_i(s)$ и $v_i(s)$ имеют тот же смысл, что и $f(s)$ и $v(s)$, но для i-вызовов. В модели $M_r|G_r|1|\infty$ [1,2]

$$f_i(s)=h_i(s)\left[1-(1-\rho_{i1})\tau_i(s)\right], \tag{5}$$

$$v_i(s)=\frac{\mu_{i+1}(s)(1-\rho_{i1})}{s-a_i+a_ih_i(s)}h_i(s) \tag{6}$$

(дообслуживание и обслуживание заново);

$$f_i(s)=m_i(s,0)\Big[m_i(0,s)-m_i(a_i,s+a_i)\tau_i(s)\big[1-\rho_{i-11}- \\ -a_i\sigma_{i-1}^{-1}\left(1-\beta_i(\sigma_{i-1})\right)\big]\Big], \tag{7}$$

$$v_i(s)=\frac{\mu_{i+1}(s)(1-\rho_{i1})}{s-a_i+a_ih_i(s)}m_i(s,0) \tag{8}$$

(потеря). Здесь $\pi_i(s)$ и $h_i(s)$ — ПЛС от ФР и i-периода и i-цикла [1], $\mu_{i+1}(s)=s+\sigma_i-\sigma_i\pi_i(s)$, $\mu_i(s)\equiv s$, $\sigma_i=a_1+\ldots+a_i$, $\sigma_0=0, m_i(s_1,s_2)=$ $=\beta_i(s_1+\sigma_{i-1})+\sigma_{i-1}(s_1+\sigma_{i-1})^{-1}(1-\beta_i(s_1+\sigma_{i-1}))\pi_{i-1}(s_2), \tau_i(s)=a_i^{-1}\mu_i(a_i)\times$ $\times\mu_i(s)\mu_i^{-1}(s+a_i)$,

$$h_i(s)=\begin{cases}\beta_i(\mu_i(s)), & \text{дообслуживание,}\\ \beta_i(s+\sigma_{i-1})\left[1-\dfrac{\sigma_{i-1}\pi_{i-1}(s)}{s+\sigma_{i-1}}\left(1-\beta_i(s+\sigma_i)\right)\right]^{-1}, & \text{обслуживание заново,}\\ m_i(s,0), & \text{потеря.}\end{cases}$$

Решается задача восстановления параметров моделей по ФР выходящего потока и виртуальных времен пребывания вызова. Близкая задача для модели $M|G|1|\infty$ решена в ([3]).

2. В модели $M|G|1|\infty$ из (1) имеем: $a=-(f(0))^{-1}$. Из (2) при дисциплинах FIFO и LIFO

$$\lim_{s\to\infty}\frac{v(s)}{f(s)}=\frac{1-a\beta_1}{a\beta_1},$$

откуда находим β_1. Далее, из (1) получаем $\beta(s)$.

Алгоритм восстановления дисциплины в модели $M|G|1|\infty$ из двух: FIFO и LIFO. Из определения $\pi(s)$, когда уже восстановлены $a,\beta_1,\beta(s)$, имеем $\lim\limits_{s\to+\infty}\pi(s)=\lim\limits_{s\to+\infty}\beta(s)\overset{def}{=}\pi_\infty<1$. Пусть $\omega_c(s)$ – ПЛС абсолютно непрерывной компоненты ФР с ПЛС $\omega(s)=(v(s)/\beta(s))$. Тогда: 1) при $\omega_*=(1-a\beta_1)a(1-\pi_\infty)$ имеем дисциплину FIFO; 2) при $\omega_*=a(1-\pi_\infty)$ имеем дисциплину LIFO, где $\omega_*=\lim\limits_{s\to+\infty}s\omega_c(s)$.

По $f(s)$ и $v(s)$ при обеих дисциплинах a и β_1 одинаковы. Приравняем значения $v(s)$ из (2). В равенстве

$$\frac{(1-a\beta_1)s}{s-a+a\beta(s)}=(1-a\beta_1)+\frac{a(1-\pi(s))}{s+a-a\pi(s)}$$

в обеих частях стоят ПЛС от неотрицательных случайных величин (СВ), каждая из которых – смесь абсолютно непрерывной СВ и СВ, равной 0. Используя единственность разложения Лебега, получаем

$$\frac{(1-a\beta_1)a(1-\beta(s))}{s-a+a\beta(s)}=\frac{a(1-\pi(s))}{s+a-a\pi(s)},$$

а пределы правой и левой частей равенства, помноженные на s, при $s\to\infty$ дают числа $a(1-\pi_\infty)>(1-a\beta_1)a(1-\pi_\infty)$, откуда следует утверждение.

Решение обратной задачи не всегда существует.

Причины. 1. $f(s)$ и $v(s)$ (см. (1) и (2)) нельзя выбирать независимо. 2. $\beta(s)$, найденная по (1), не всегда есть ПЛС от отрицательной СВ.

Примеры. 1. ФР с ПЛС $f(s)$ и $v(s)$ не могут быть неразложимы. Для $v(s)$ это следует из (4), а для $f(s)$

$$f(s)=\beta(s)\left(a\beta_1+(1-a\beta_1)\frac{a}{s+a}\right)=\beta(s)\left[(a\beta_1)^{1/2}+\left(1-(a\beta_1)^{1/2}\right)g(s)\right]^2,$$

где легко видеть, что

$$g(s)=\frac{(a\beta_1)^{1/2}}{1-(a\beta_1)^{1/2}}\left[\frac{(s+\beta_1^{-1})^{1/2}-(s+a)^{1/2}}{(s+a)^{1/2}}\right] \text{ —}$$

ПЛС от абсолютно непрерывной СВ.

В различных метриках разложения ФР всюду плотны в множестве всех ФР (5-7) и решение не существует для широкого класса ФР.

2. При дисциплине FIFO $f(s)$ и $v(s)$ не могут быть ПЛС от распределений Эрланга порядка k. Если $f(s)=\dfrac{(ka)^k}{(s+ka)^k}$, то

$$\beta(s)=\frac{(s+a)(ka)^k}{a(s\beta_1+1)(s+ka)^k},\ a\beta_1<1\ .$$

Нетрудно показать, что найдется M такое, что $(-1)^M\beta^{(M)}(0)<0$. Тогда $\beta(s)$ не есть ПЛС от неотрицательной СВ.

Пусть $v(s)=\left[\dfrac{v}{s+v}\right]^k$. Достаточно рассмотреть случай $k=2$. При $k=2$ функция $\beta(s)=\dfrac{(v+a)^2}{(s+v+a/2)^2+(v+a)^2-(a/2+v)^2}$ допускает обращение $b(x)=\left((v+a)^2-(\frac{a}{2}+v)^2\right)^{-1/2}\exp(-(v+\frac{a}{2})x)\sin\left(\left((v+a)^2-\right.\right.$ $\left.\left.-(\frac{a}{2}+v)^2\right)^{1/2}x\right)(v+a)^2$. Но $b(x)$ принимает отрицательные значения и не есть плотность.

Задача восстановления параметров может иметь решение.

Пример. При дисциплине FIFO ФР $V(x)$ может быть гиперэкспоненциальной ФР: $V(x)=p(1-e^{-v_1x})+(1-p)(1-e^{-v_2x})$. Для разрешимости обратной задачи $f(s)$ должно иметь вид

$$\tau(s)=\left[1-\frac{v}{\beta}+\frac{v}{\beta}\frac{a}{s+a}\right]\frac{\beta}{v}\left[\frac{As_1}{s+s_1}+\frac{Bs_2}{s+s_2}\right],$$

где

$$s_{1,2}=\frac{a+v_1+v_2}{2}\pm\left(\left[\frac{a+v_1+v_2}{2}\right]^2-\frac{\beta}{v}\right)^{1/2},$$

$$A=\frac{s_1\alpha-v_1v_2}{s_1(s_1-s_2)},\ B=\frac{v_1v_2-s_2\alpha}{s_2(s_1-s_2)},$$

$$\alpha=pv_1+(1-p)v_2,\ v=\alpha a+v_1v_2,\ \beta=(v_1+a)(v_2+a).$$

Достаточно показать, что $s_1>0,\ s_2>0,\ A>0,\ B>0$. Имеем $A+B=v/\beta$ и

$$\left[\frac{a+v_1+v_2}{2}\right]^2-\frac{v_1v_2\beta}{v}=\frac{(a+v_1+v_2)^2(v-4v_1v_2\beta)}{4v}.$$

Оценим числитель последнего выражения

$$(a+v_1+v_2)^2(v-4v_1v_2\beta)>(a+v_1+v_2)^2(v_1a+v_1v_2)-4v_1v_2\beta=$$

$$=v_1(a+v_2)(a+v_1-v_2)^2>0.$$

Из определения A и B: $A+B=v_1v_2s_1^{-1}s_2^{-1}$. Далее, $s_1s_2=\dfrac{v_1v_2\beta}{v}$. Неравенства $A>0,\ B>0$ нетрудно вывести из определения A и B.

Алгоритм восстановления параметров в модели $GI|M|1|\infty$. Из (3) имеем

$$\alpha(s)=\rho+\frac{\rho[s-b(1-\rho)]}{b(1-\rho)}-\frac{(s+b)(s-b(1-\rho))}{b^2(1-\rho)}f(s).$$

Константы ρ и b находим из соотношений

$$v_1=-v'(0)=[b(1-\rho)]^{-1},\ \lim_{s\to\infty}\frac{v(s)}{f(s)}=\frac{1-\rho}{\rho}.$$

Алгоритм восстановления дисциплины в модели $GI|M|1|\infty$. При дисциплине FIFO $v(s)$ — ПЛС от показательной ФР. Можно ли получить такую же $v(s)$ при дисциплине LIFO? Предположим, что можно: $[1-\rho+\rho\pi(s)]\times\dfrac{s}{b+s}=\dfrac{v}{v+s}$. Отсюда $1-\rho+\rho\pi(s)=\dfrac{v}{b}+\left(1-\dfrac{v}{b}\right)\dfrac{v}{v+s}$, $\pi(s)$ — ПЛС от абсолютно непрерывной СВ, поэтому в силу единственности разложения Лебега $\rho=1-\dfrac{v}{b}$, $\pi(s)=\dfrac{v}{v+s}$, т.е. $\gamma(s)=1-\dfrac{v}{b}$, $\alpha(s)\equiv1$ и нет стационарного режима.

3. *Алгоритм* восстановления параметров в модели $M_r|G_r|1|\infty$ с абсолютным приоритетом является рекуррентным по i от 1 до r. При

$i=1$ имеем модель $M|G|1|\infty$ с дисциплиной FIFO и по $f_1(s)$, $v_1(s)$ восстанавливаются $a_1, \beta_{11}, \beta_1(s)$. Пусть по функциям $f_j(s), v_j(s)$, $j=\overline{1,i-1}$, $i>1$ восстановлены $a_j, \beta_{j1}, \beta_j(s)$. Покажем, как находятся $a_i, \beta_{i1}, \beta_i(s)$ с помощью функций $f_j(s), v_j(s)$, $j=\overline{1,i}$.

Для всех разновидностей абсолютного приоритета

$$a_i^{-1} = -f_i'(0), \tag{10}$$

что нетрудно проверить на основе (5) и (7). Из (5) и (8)

$$\lim_{s\to\infty}\frac{v_i(s)}{f_i(s)} = \frac{1-\rho_{i1}}{1-a_i^{-1}(1-\rho_{i1})\mu_i(a_i)} \tag{11}$$

(дообслуживание и обслуживание заново),

$$\lim_{s\to\infty}\frac{v_i(s)}{\tau_i(s)} = (1-\rho_{i1})\Big\{\beta_i(\sigma_{i-1}) + \big(1-\beta_i(\sigma_{i-1})\big)\pi_{i-1\infty} - \Big(\beta_i(\sigma_i) + \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}(1-$$

$$\beta_i(\sigma_i))\pi_{i-1\infty}\Big)\frac{\mu_i(a_i)}{a_i}\frac{1}{h_i(a_i)}\Big(1-\rho_{i-11} - \sigma_{i-1}^{-1}a_i\big(1-\beta_i(\sigma_{i-1})\big)\Big)\Big\}^{-1}, \tag{12}$$

(потеря прерванного вызова), где $\pi_{i-1\infty} = \lim\limits_{s\to\infty}\pi_{i-1}(s) < \infty$. В (11) неизвестно только $1-\rho_{i1}$. Итак, в случае дообслуживания и обслуживания заново из (11) находим $1-\rho_{i1}$.

Дообслуживание. Так как $1-\rho_{i1} = 1-\rho_{i-11} - a_i\beta_{i1}$, то восстанавливается β_{i1}. Далее, из (9)

$$\beta_i(s) = h_i\left(s - \sum_{j=1}^{i-1}\big(a_j - a_j\beta_j(s)\big)\right). \tag{13}$$

Восстановив $h_i(s)$ по формуле (5), из (13) находим $\beta_i(s)$.

Обслуживание заново. Опять по формуле (5) восстанавливаем $h_i(s)$, а из (9) находим $\beta_i(s+\sigma_{i-1})$ при Re $s>0$. Используя аналитическое продолжение, определяем $\beta_i(s)$ при Re $s>0$ и подсчитываем β_{i1}.

Потеря. Подставим в (7) и (8) $s=a_i$. Получим два уравнения. Эти два уравнения позволяют найти неизвестные константы $\beta_i(\sigma_{i-1})$, $\beta_i(\sigma_i)$ и $h_i(a_i)$. Теперь уравнения (8) и (9) относительно неизвестных функций $h_i(s)$ и $\beta_i(s+\sigma_{i-1})$ определяют функцию $\beta_i(s+\sigma_{i-1})$ при Re $s>0$. Используя аналитическое продолжение, определяем $\beta_i(s)$ при Re $s>0$ и подсчитываем β_{i1}.

Ереванский государственный университет

Մ. Գ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ, Վ. Գ. ՈՒՇԱԿՈՎ

Հակադարձ խնդիրներ որոշ միալար համակարգերում

Դիտարկվում է $M_r|G_r|1|\infty$ համակարգը բացարձակ և հարաբերական գերադասելիությամբ հերթակարգերով: Տարբերում ենք բացարձակ գերադասելիությամբ հերթակարգի երեք տարբերակներ՝ ընդհատված պահանջի կորուստ, վերասպասարկում, սպասարկում ընդհատված կետից: Ելքային հոսքի միաչափ բաշխումների և պահանջների համակարգում գտնվելու ժամանակների բնութագրիչների օգնությամբ վերականգնվում են համակարգի նախնական բնութագրիչները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Нагапетян, В. Г. Ушаков*, Вероятн. и оптим., ЕГУ, № 3, 1996. [2] *В. Ф. Матвеев, В. Г. Ушаков*, Системы массового обслуживания, изд. Моск. ун-та, 1984. [3] *И. Н. Коваленко*, ДАН СССР, т. 164, № 5, с. 1979-1981 (1965). [4] *Э. А. Даниелян, Г. А. Попов*, ДАН АрмССР, т. 71, № 3, с. 129-135 (1980). [5] *В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков*, Теория вероятностей и ее применения, т. 29, в. 2, с. 348-351 (1984). [6] *В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков*, Теория вероятностей и ее применения, т. 31, в. 2, с. 369-372 (1986). [7] *K. R. Parthasararhy, R. R. Rao, S. R. Varadhan*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 102, № 2, p. 200-217 (1962).