ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №1

МАТЕМАТИКА

УДК 512 642

А.М.Григорян

Квазилинейные пространства

(Представлено академиком НАН Армении А.Б.Нерсисяном 17/V 1996)

В работе ([1]) было предложено рассмотрение квазилинейных систем, которые позволяют не только строить новые методы, но и объединить и классифицировать имеющееся к настоящему времени многообразие линейных и нелинейных методов (и систем), широко используемых во многих областях цифровой обработки сигналов и изображений ([2,3]). Такие системы представляют собой гомоморфные отображения, определяемые в пространствах с алгебраической структурой, названной *квазилинейным пространством*. С их помощью было выделено основополагающее свойство суперпозиции, присущее многим нелинейным операциям, и определена та минимальная алгебраическая структура, которая включает в себя линейные пространства и многие совокупности множеств и функций, традиционно считающихся нелинейными.

1. *Квазилинейное пространство* элементов определяется над некоторым множеством с бинарной операцией, подчиняющейся заданным аксиомам группы или моноида ([4]).

Пусть множество K есть *моноид*, т.е. ассоциативное множество с единичным элементом. Будем называть K множеством скаляров. Суть построения квазилинейного пространства состоит в ослаблении условий линейного пространства в степени, достаточной для получения таких границ пространства, которые включили бы многие полезные нелинейные образования элементов. В то же время мы постараемся сохранить максимум возможного в структуре линейного пространства ([5]).

Определение 1. Непустое множество E элементов $x, y, z, \ldots$ называется *квазилинейным пространством (над моноидом K)*, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило ρ, посредством которого любым двум элементам x и y множества E ставится в соответствие третий элемент z из этого множества, обозначаемый через $x \rho y$, т.е. $z = x \rho y$.

II. Имеется правило τ, посредством которого любому элементу x множества E и любому числу $k \in K$ ставится в соответствие элемент u из E, обозначаемый через $k\tau x$, т.е. $u = k\tau x$.

III. Эти правила удовлетворяют следующим шести аксиомам:

1°. $x\rho y = y\rho x$;

2°. $x\rho(y\rho z) = (x\rho y)\rho z$;

3°. в E существует такой элемент 0, что $x\rho 0 = x$ для всех $x \in E$;

4°. $1\tau x = x$ для каждого элемента $x \in E$;

5°. $k_1\tau(k_2\tau x) = (k_1 k_2)\tau x$ для всех чисел $k_1, k_2 \in K$;

6°. $k\tau(x\rho y) = (k\tau x)\rho(k\tau y)$.

Квазилинейное пространство E с операциями ρ и τ будет обозначаться через $E(\rho, \tau; K)$.

2. Предлагаемая концепция квазилинейных пространств связывает известную концепцию линейных (или векторных) пространств с пространствами, которые сильно отличаются от линейных пространств. Можно сказать, что понятие квазилинейного пространства совпадает с линейным пространством, если множество скаляров K есть *числовое поле* $S(g)$ (где g ее вторая бинарная операция) и к перечисленным шести аксиомам добавить следующие две аксиомы:

7°. для каждого элемента x существует такой элемент $-x$, что $x\rho(-x) = 0$;

8°. $(k_1 g k_2)\tau x = (k_1\tau x)\rho(k_2\tau x)$ для всех $k_1, k_2 \in S(g)$.

Следует отметить следующие три обстоятельства в пользу квазилинейных пространств. Во-первых, так как поле имеет достаточно регулярную структуру, невозможно построение полей с произвольным числом элементов — конечные поля существуют только, когда число элементов равно степени простого числа. С другой стороны, моноиды (и группы) с произвольным числом элементов легко строятся. Во-вторых, в теории обработки изображений, которые описываются положительными дискретными функциями многих переменных, операция противоположного элемента (отрицательного изображения) вообще лишена смысла. Потому здесь нет необходимости в аксиоме 7°. И наконец, для многих целей цифровой обработки сигналов и изображений аксиома 8°, в отличие от других аксиом линейного пространства, требует выполнения довольно сильных условий, поскольку жестко связывает алгебраическую структуру множества скаляров (а выбор таких может быть различным) с аддитивной структурой самого пространства.

Эту аксиому мы назовем аксиомой существования прямой линии. Рассмотрим аксиому 8°, в которой для упрощения записи будем считать, что $g = +$. Так как $1 \in S(+)$, следующее соотношение $1\tau x = (k\tau x)\rho((1-k)\tau x) = x$ имеет место для любого $x \in E$ и всех $k \in S(g)$.

Для фиксированного элемента x из E рассмотрим функцию $l(k)$ на $S(+)$, график которой $G(k)=G_x(k)=\left(k,l(k)\right)=\left(k\alpha,(1-k)\alpha\right)$.

На плоскости $E\times E$ график $G(k)$ этой функции представляет собой прямую, пересекающую оси координат в точках $(0,x)$ и $(x,0)$. Таким образом, в линейном пространстве E каждый элемент x индуцирует прямую, пересекающую оси координат на расстоянии x от центра: $x\Rightarrow l_x(k)$. Другими словами, можно сказать, что линейное пространство это такое множество E, для которого имеет место следующее утверждение: для заданного элемента $x\in E$ все точки соответствующей прямой $l_x(k)$ лежат в произведении $E\times E$. Более того, вместе с $l_x(k)$ в $E\times E$ лежат и все прямые, параллельные первой. И мы можем рассматривать операции ρ и τ на E как операции параллельных переносов прямых в $E\times E$. Обозначим через L рассмотренное семейство параллельных прямых $L=\left\{l_x\,;x\in E\right\}$, полностью лежащих в произведении линейных пространств $E\times E$. В силу приведенных рассуждений, аксиому 8° будем называть *аксиомой существования прямой* (или *семейства параллельных прямых*). Такая интерпретация аксиомы 8° полностью согласуется с шестью аксиомами линейного пространства.

При анализе аксиомы 8° линейного пространства мы естественно приходим к мысли ее замены или обобщения. Действительно, можно попытаться ввести такую аксиому, которая позволяла бы рассматривать произведение пространств $E\times E$ как множество, образованное семейством подобных кривых, отличных от прямых. Для этого возьмем некоторую бесконечную в обе стороны кривую $\tilde{l}_x$, проходящую через точки $(0,x),(x,0)\in E\times E$. И рассмотрим соответствующее ей семейство подобных кривых $\tilde{l}_y$ (кривых, образованных гомотопиями с центром в начале координат и положительными (или произвольными, когда берется числовое поле S) коэффициентами), $\tilde{L}=\left\{\tilde{l}_x\,;\,y\in E\setminus\{0\}\right\}$. Возникает вопрос — как записать аксиому 8°, чтобы все кривые $\tilde{l}_y$ лежали бы в $E\times E$? Нетрудно показать, что для этого нужно, чтобы для всех $k\in S$ выполнялось тождество: $x=(k_1\alpha)\rho\left(\tilde{l}\left(k_1\right)\alpha\right)$. Будем считать, что $\tilde{l}_x(k)=\tilde{l}(k)\alpha$, где $\tilde{l}(k)$ бесконечная в обе стороны кривая пересекает оси координат в точках $(0,1)$ и $(1,0)$, т.е. $\tilde{l}(0)=1$, $\tilde{l}(1)=0$. Поэтому соответствующая аксиома 8° должна принять вид

$$(k_1gk_2)\alpha=(k_1\alpha)\rho\left(\left(k_2g\tilde{k}_1\right)\alpha\right),\quad \tilde{k}_1=\left(k_1g(-1)\right)g\left(\tilde{l}\left(k_1\right)\right), \qquad (1)$$

для всех $k_1,k_2\in S(g)$ и любого $x\in E$. В случае числового поля $S(+)$ такая аксиома записывается в виде $(k_1+k_2)\alpha=(k_1\alpha)\rho\left(\left(k_2+\tilde{k}_1\right)\alpha\right)$,

$\widetilde{k}_1 = k_1 - 1 + \widetilde{l}(k_1)$ для всех $k_1, k_2 \in S(+)$ и любого $x \in E$.

Эту аксиому будем обозначать как аксиому $\widetilde{8}°$ и называть ее *аксиомой существования бесконечной кривой заданного вида.* А для заданного семейства подобных кривых $\widetilde{L}$ квазилинейное пространство, дополненное аксиомами 7° и $\widetilde{8}°$, назовем $\widetilde{L}$*-пространством.* Ясно, что когда $\widetilde{L}$ есть семейство L параллельных прямых, рассмотренных выше, то L-пространство совпадает с линейным пространством.

В квазилинейных пространствах, как и в линейных пространствах, можно ввести понятия линейной независимости элементов, базиса и гомоморфизма. Все они связаны с понятием подпространства, подобно такому для линейного пространства.

3. Приведем примеры квазилинейных пространств.

Пример 1 (пространства функций). Совокупности F действительных n-мерных функций $f(x)$, $g(x)$,..., определенных на множестве X с областью значений $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$, вместе с операциями $\rho = \max(\vee)$ или $\min(\wedge)$ и умножением $\tau = \times$ на элементы группы $R_+ = (0, +\infty)$: являются квазилинейными пространствами $F(\vee, \times; R_+)$ и $F(\wedge, \times; R_+)$, соответственно.

Пример 2 (n-мерное пространство). Множество упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ... из n элементов $x_i, y_i, \ldots$, $i = 1 \div n$, есть квазилинейное пространство с операциями поточечного сложения и умножения на константу.

Пример 3 (полиномы). Множество P_n алгебраических полиномов степени $< n$ с неотрицательными коэффициентами есть квазилинейное пространство $P_n(+, \times; R_+)$.

Пример 4 (решетки). Пусть $\mathcal{P}_\vee$ и $\mathcal{P}_\wedge$ есть $\vee$- и $\wedge$-полурешетки, т.е. упорядоченные множества с определенным коммутативным и ассоциативным бинарным отношением $\leq$, в которых произвольные элементы x и y имеют соответственно верхнюю точную грань (или sup) $x \vee y$ и нижнюю точную грань (или inf) $x \wedge y$. Операции $\vee$ и $\wedge$ являются бинарными операциями в $\mathcal{P}_\vee$ и $\mathcal{P}_\wedge$.

Если полурешетки $\mathcal{P}_\vee$ и $\mathcal{P}_\wedge$ содержат наименьший и наибольший (универсальные) элементы, O и I, тогда выполняются следующие соотношения: 1) $x \vee y = y \vee x$, 2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, 3) $x \vee O = x$, и 1) $x \wedge y = y \wedge x$, 2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, 3) $x \wedge I = x$, для всех $x, y \in \mathcal{P}$. Существуют различные полурешетки ([7]), в которых мы можем определить операцию умножения и получить квазилинейные пространства. Например, если $\mathcal{P}_\wedge$ есть полурешетка n-мерных полунепрерывных сверху числовых функций, тогда для обычного умножения $\tau = \times$ на скаляр из группы K мы имеем: 4) $1\tau x = x$; 5) $k_1 \tau (k_2 \tau x) = (k_1 k_2) \tau x$; 6) $k\tau(x \vee y) = (k\tau x) \vee (k\tau y)$. Пусть Z^* будет множеством положительных чисел и $x \leq y$ означает, что x делит y. Тогда, в множестве Z^{+} имеет место операция умножения на скаляр. Для заданного топологического пространства $\mathcal{P}$ семейство $\mathcal{F}$ всех открытых множеств является решеткой и имеет место операция гомотопии (подобия), $k\tau X = kX$, для всех $k \in Z^{+}$.

Пусть $\mathcal{P}$ является дистрибутивной решеткой, то есть $\mathcal{P}$ есть одновременно $\vee-$ и $\wedge-$полурешетка и следующие равносильные тождества имеют место: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ и $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, для всех $x, y, z \in \mathcal{P}$. Тогда можно рассматривать $\mathcal{P}$ как квазилинейное пространство с операциями $(\vee, \wedge)$ или $(\wedge, \vee)$.

Пример 5 (подмножества). Совокупности подмножеств $X, Y, Z, \ldots$ некоторого множества A, замкнутые относительно операций объединения и пересечения подмножеств и преобразования подобия: $X\rho Y = X \cup Y (X \cap Y)$ и $k\tau X = kX = \{kx; x \in X\}$, $k \in K$, являются соответственно квазилинейными пространствами.

Пример 6 (свертка подмножеств). Пусть K есть группа скаляров с бинарной операцией g. Тогда множество семейств $\mathcal{T} = \{T_a\}_{a \in K}$, $\mathcal{G} = \{G_a\}_{a \in K}$,... подмножеств некоторого множества A, замкнутое относительно преобразования подобия и операции *свертки множеств*, которую мы вводим в виде следующего объединения: $\mathcal{V} = \{V_a\} = \mathcal{T}\rho\mathcal{G} = \left\{\bigcup_{b \in K} \left\{T_{ag(-b)} \cap G_b\right\}\right\}$ составляют квазилинейное пространство $\mathcal{M}(\rho, \times; K)$.

Пример 7 (булевы функции). Пусть $\oplus$ есть операция *сложения по модулю* 2. Семейство n-мерных булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ с операциями сложения булевых функций и умножения на неотрицательные целые: $f\rho g = f \oplus g$ и $k\tau f = k \otimes f = f \oplus f \ldots \oplus f$ (k раз), если $k \geq 1$, является квазилинейным пространством с двумя логическими операциями.

Возникает следующий вопрос — можно ли всякое квазилинейное пространство дополнить до линейного? Ответ отрицательный, и для этого достаточно обратиться к примеру 1. Например, для квазилинейного пространства $F(\vee, \times; R)$ требование аксиомы 8° запишется в виде $(k_1 + k_2) f = (k_1 f) \vee (k_2 f)$, что невыполнимо для $k_1 \neq 0$ или $k_2 \neq 0$.

Вышеприведенные примеры квазилинейных пространств показывают, что различные традиционно считающиеся нелинейными пространства элементов (функций, подмножеств) с разными операциями (арифметическими, логическими, теоретико-множественными) объединены общим понятием квазилинейного пространства.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН Армении

Մ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Քվազիգծային տարածություններ

Նկարագրվում են քվազիգծային տարածություններ, որոնք թույլատրում են ընդգրկել բազմաչափ տվյալների, դիսկրետ և անընդհատ ֆունկցիաների տարբեր համախմբություններ: Մասնավորապես նկարագրվում են ազդանշանների և պատկերների բազմաթիվ ձևավորումներ, որոնք օգտագործվում են մաթեմատիկական մորֆոլոգիայում: Նկարագրված քվազիգծային տարածությունները թույլ են տալիս վերոհիշյալ գոյացությունները դիտարկել որպես հանրահաշվական կառուցվածք ունեցող տարածություններ: Բերված է գծային տարածության 8-րդ աքսիոմի ընդհանրացումը:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Grigorian, S. Agaian, J. Astola,* Proc. SPIE's Symposium on Electronic Imaging: Science and Technology, February 1995, San-Jose. 1995. [2] *E. R. Dougherty, J. Astola,* SPIE Press, v. TT16 (1994). [3] *I. Pitas, Venetsanapoalus,* Nonlinear Digital Filters, Boston: Kluwer Academic Publisher, 1990. [4] *М. Каргополов, И. Мерзляков,* Основы теории групп, Наука, 1972. [5] *В. Ильин, Е. Поздняк,* Линейная алгебра, 6-ое изд. М., Наука, 1974. [6] *J. Serra,* Image Analysis and Mathematical Morphology, London, Academ Hress, 1988. [7] *Г. Биркгоф,* Теория решеток, М., Наука, 1984.