ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

АВТОМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6

Р. Е. Саркисян

# К сходимости адаптивных интерактивных процедур, основанных на методах производных по направлению

(Представлено академиком НАН Армении А. А. Терзяном 11/XI 1994)

Большинство оптимизационных задач, связанных с проектированием, созданием, эксплуатацией и совершенствованием сложных технических и организационных систем, имеет многокритериальный характер, обусловленный тем, что в них при выработке и обосновании решений необходимо учитывать многочисленные разнородные взаимосвязанные факторы и требования, предъявляемые к качеству и эффективности функционирования систем.

Автоматизация решения системных многокритериальных задач связана с разработкой и реализацией на ЭВМ соответствующих интерактивных поисковых процедур, среди которых адаптивные процедуры обладают высокой эффективностью и гибкостью ([1]). Порождаемый ими релаксационный процесс поиска наиболее предпочтительных компромиссных решений основан на сложном алгоритмическом отображении, т.е. процесс перехода к новому решению осуществляется по рекуррентной формуле $x^{k+1} \in A(x^k)$, $k = 0,1,\ldots$, где $A = C \circ B$ — композиция отображения поиска направления ($B$) и отображения линейного спуска ($C$).

Статья посвящена доказательству сходимости этого процесса к одному из компромиссных решений, оптимальных по Парето, с учетом особенностей модели и общих свойств сложных отображений методов возможных направлений.

Как известно ([2]), условия, гарантирующие сходимость последовательности $\{x^k\}$ к одной из точек множества решений $D^* = \operatorname{Arg}\max u(f(x))$, $x \in D$, где $D$ — множество допустимых решений, $f: E^n \to E^m$ — векторный критерий, а $u: E^m \to E^1$ — функция полезности, сводятся к следующему.

Установить сходимость адаптивных интерактивных поисковых процедур можно, не прибегая к проверке упомянутых условий, а основываясь на известных свойствах множеств $D$, $F=\left\{f\in F^m / f=f(x),\right.$ $\left.x\in D\right\}$, функций $f$, $u$ и общих свойствах методов возможных направлений ([2]).

Рассмотрим случай, когда $D$ выпукло, замкнуто и ограничено; $f$ и $u$ непрерывно дифференцируемы и вогнуты, причем $u$ возрастает на выпуклой оболочке $F$. Известно, что при этих условиях множество эффективных (Парето-оптимальных) решений $\pi(D)=f^{-1}(\pi(F))$ замкнуто и ограничено, где $\pi(D)$ — эффективная граница множества $F$ (множество компромиссных решений).

В общем случае выпуклость $D$ и вогнутость $f(x)$ не гарантируют выпуклости множества $F$, однако при этом выпуклым оказывается множество $F_{*}=F-E_{+}^{m}$, где $E_{+}^{m}$ — неотрицательный ортант евклидова пространства $E^m$, и имеют место соотношения $S(F)=F\cap\partial(F_{*})$, $\pi(F)=\pi(F_{*}), \sigma(F)=\sigma(F_{*})$. В них $S(F)$ — множество слабо эффективных оценок, $\sigma(F)$ — множество собственно эффективных оценок, а $\partial(F_{*})$ — граница множества $(F_{*})$. Говорят, что множество $F$ эффективно выпукло ([3]).

Пусть $H(F)$ — выпуклая оболочка $F$. Очевидно, что $H(F)\subset F_{*}$, $\pi(H(F))=\pi(F)=\pi(F_{*})$. Путем "проектирования" на $F$, вместо $D^{*}$, рассмотрим множества $F^{*}=\{f\in F / u(f)\geq u(\varphi), \forall\varphi\in F\}$, $F_H^{*}=\{f\in H(F) /$ $/ u(f)\geq u(\varphi), \forall\varphi\in H(F)\}$; пусть $P(f)$ — множество возможных направлений в точке $f\in H(F)$, т.е. если $P\in E^m, \|P\|=1$ и $P\in P(f)$, то найдется такое $\delta>0$, что $f+\sigma P\in H(F)$ для всех $\sigma$ из $(0,\delta)$.

Основываясь на результатах работы ([4]), докажем справедливость следующих утверждений:

$$f^{*}\in F_H^{*}\rightarrow f^{*}\in\pi(H(F)); \tag{1}$$

$$f^{e}\in\pi(H(F))\rightarrow f^{e}\in F\subseteq H(F); \tag{2}$$

$$f^{*}\in\pi(H(F))\wedge f^{*}\in F\rightarrow f^{*}\in F^{*}. \tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что по определению множества $\pi(H(F))$ для произвольной его точки $f^{e}$ по крайней мере одна из координат возможных направлений из $P(f^{e})$ отрицательна. Если $f^{*}\in F_H^{*}$, то имеет место условие

$$\nabla_f u(f^{*})^T P\leq 0, \ \forall P\in P(f^{*}), \tag{4}$$

где $\nabla_f u(f^*)$ — градиент функции $u(f(x))$, вычисленный в точке $f^*$. Поскольку $u$ возрастает на $H(F)$, все координаты градиента $\nabla_f u(f^*)$ положительны, т.е. $\partial u(f^*)/\partial f_r > 0$, $r = 1,\dots,m$. Тогда из (4) следует, что по крайней мере одна из координат вектора $P$ отрицательна, а это может иметь место тогда и только тогда, когда $f^* \in \pi(H(F))$. Этот вывод доказывает справедливость условия (1).

Пусть точка $f^H$ принадлежит выпуклой оболочке $H(F)$, что может иметь место тогда и только тогда, когда существуют точки $f^1,\dots,f^k$ из $F$ и числа $\alpha_j \ge 0$, $j = 1,\dots,k$; $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 1$, такие, что справедливо представление ([2])

$$f^H = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j f^j, \tag{5}$$

где $k$ — некоторое натуральное число.

Пусть $f^e \in \pi(H(F))$ и $f^e = \alpha f^1 + (1-\alpha)f^2, f^1, f^2 \in F, \alpha \in (0,1)$. Если $f^1$ и $f^2$ — образы $x^1$ и $x^2$ из $D$ по отображению $f$, то, ввиду выпуклости $D$, имеет место $x^3 = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in D$. Вогнутость $f$ на $D$ и предположение о том, что $u$ вогнуто возрастает на $H(F)$, а следовательно на $F \subseteq H(F)$, является достаточным условием вогнутости $u$ на $D$ ([4]). Следовательно,

$$u(x^3) \ge \alpha u(x^1) + (1-\alpha)u(x^2). \tag{6}$$

Это неравенство должно выполняться и для векторов $f^1, f^2$ и $f^3 = f(x^3)$, т.е.

$$f^3 \ge \alpha f^1 + (1-\alpha)f^2 = f^e,\ \alpha \in (0,1). \tag{7}$$

Если $f^3 \ne f^e$, то в множестве $P(f^e)$ найдется направление такое, что по крайней мере одна из его координат положительна, а остальные координаты неотрицательны. Но $f^e \in \pi(H(F))$, так что возможен лишь исход $f^3 = f^e$. Отсюда заключаем, что $f^e \in F$, т.е. предположение (2) справедливо.

Таким образом, сделанные относительно $D$, $f$ и $u$ предположения приводят к тому, что всякое оптимальное решение из $F_H^*$ принадлежит паретовской границе выпуклой оболочки $H(F)$ и в то же время является элементом множества $F \subseteq H(F)$. Следовательно, это решение содержится в $F^* \subset F$, т.е. верно и утверждение (3).

По существу рассмотренная в [1] адаптивная интерактивная процедура представляет собой формальное применение метода возможных направлений Зойтендейка [3,5] к задаче $\max u(f(x))$ при $x \in D$, в которой оптимизация вогнутой функции проводится на выпуклом и ограниченном множестве $D$. При этих условиях методы возможных направлений сходятся, поэтому диалоговая процедура либо останавливается за конечное число шагов в некоторой точке из $D^*$, либо порождает бесконечную последовательность, сходящуюся к точкам из $D^*$.

Численные эксперименты над моделями задач оптимизации при многих критериях показывают, что скорость сходимости достаточно высока.

В общем случае сходимость метода Зойтендейка не гарантируется из-за того, что соответствующее алгоритмическое отображение может оказаться незамкнутым.

Известны и в практике оптимизации широко применяются две корректирующие процедуры, гарантирующие сходимость алгоритмов возможных направлений к точкам из $D^*$ [5]. Одна из них известна как метод $\varepsilon$-возмущений и связана с пошаговой коррекцией используемого при определении множества активных ограничений $I(x^k) = \{i / q_i(x) + +\varepsilon \geq 0,\ i = 1,\dots,r\}$ малого параметра $\varepsilon > 0$, где $q_i(x) \leq 0,\ i = 1,\dots,r$ — ограничения, фигурирующие в описании множества $D$. Другая связана с модификацией Топкиса-Вейнотта, которая сводит задачу выбора наилучшего направления к оптимизационной задаче

$$\begin{aligned}
&z \longrightarrow \max \\
&\qquad \nabla_x u\big(f(x^k)\big)^T d \geq z \\
&\qquad \nabla_x q_i(x^k)^T + q_i(x^k) \leq -z \\
&\qquad i = 1,\dots,r \\
&\qquad d \in E^n,\ \|d\| = 1,\ z \geq 0 .
\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть двойка $(z^k, d^k)$ является решением задачи (8). Если $z^k > 0$, то $\nabla_x u\big(f(x^k)\big)^T d^k > 0$ и существует $\delta > 0$ такое, что $u\big(f(x^k + \sigma d^k)\big) > > u\big(f(x^k)\big)$ для всех $\sigma$ из $(0, \delta)$, т.е. направление $e^k = d^k$ является условным градиентом $u\big(f(x)\big)$ в точке $x^k$. Если же $z^k = 0$, точка $x^k$ удовлетворяет условиям теоремы Куна—Таккера для функции $u\big(f(x)\big)$ и, ввиду ее вогнутости, является точкой глобального оптимума, т.е. $x^k \in D^*$.

В заключение отметим, что если в описании $D$ фигурируют также нелинейные ограничения-равенства $h_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,l$, то найденный вектор $d^k$ будет касательным к ограничениям-равенствам и к некоторым активным нелинейным ограничениям, поэтому движение вдоль него приведет к нарушению ограничений. В этом случае необходимо применить стратегию проекционных методов, т.е. организовать вдоль $d^k$ линейный поиск с последующим проектированием нового решения $x^k + \sigma_k d^k$ на множество $D$. Проекцию можно вычислить, например, путем решения задачи $\min\|x - z\|$ при $x \in D$, где $z = x^k + \sigma_k d^k$ – найденная на этапе линейного поиска недопустимая точка.

Государственный инженерный университет Армении

**Ռ. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ**

## Ըստ ուղղությունների ածանցյալների մեթոդի վրա հիմնված մարդ-մեքենայական ընթացակարգերի զուգամիտությունը

*Բարդ տեխնիկական և կազմակերպական համակարգերի նախագծման, ստեղծման, շահագործման և կատարելագործման խնդիրների մեծամասնությունը բազմաչափանիշային բնույթ է կրում: Այդ դասի խնդիրների լուծումը կապված է համապատասխան ինտերակտիվ որոնողական ալգորիթմների և ընթացակարգերի մշակման և ԷՀՄ–ի վրա նրանց իրականացման հետ, որոնք պետք է բավարարեն զուգամիտության պայմաններին:*

*Աշխատանքը նվիրված է այդպիսի ալգորիթմների և ընթացակարգերի զուգամիտության ուսումնասիրմանը, երբ, որպես կարևորագույն գործոններ, հանդես են գալիս ինչպես օբյեկտիվ մոդելների, այնպես էլ հնարավոր ուղղությունների մեթոդների հատկությունները:*

### ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р.Е.Саркисян,* Информатика. Сер. прикладные проблемы. Вопр. теории и практики, вып.2, с.84-99 (1990). [2] *М.Базара, К.Шетти,* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы, М., Мир, 1982. [3] *В.В.Подиновский, В.Д.Ногин,* Порето-оптимальные решения многокритериальных задач, М., Наука, 1982. [4] *А.М.Джоффрион, Дж.Дайер, А.Файнберг,* в кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений, М., Мир, с.126-145, 1976. [5] *Г.Реклейтис, А.Рейвиндран, К.Рэгсдел,* Оптимизация в технике. Кн.2, М., Мир, 1986.