ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

УДК 539.3:534.1

В. С. Тоноян, В. А. Бежанян

Задача электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с двумя граничными электродами

(Представлено академиком НАН Армении С. А. Амбарцумяном 30/III 1995)

Электроупругое состояние пьезокерамической полуплоскости, поляризованной в направлении оси, перпендикулярной к границе полуплоскости с двумя граничными электродами, рассмотрено в работе ([1]).

В настоящей работе получено точное решение задачи электроупругости для пьезокерамической полуплоскости, когда на границе располагаются два ленточных электрода с электрическими потенциалами $\pm V_o$, симметричные относительно вертикальной оси. Предполагается, что направление предварительной поляризации параллельно границе полуплоскости, которая свободна от внешних механических воздействий. Полуплоскость граничит с вакуумом. Решение задачи представлено в виде интегралов Фурье. Определение произвольных функций интегрирования сведено к решению "тройных" интегральных уравнений по тригонометрическим функциям, которые решаются в замкнутом виде. Получены аналитические формулы для плотности распределения электрических зарядов на электродах и для нормальных механических напряжений под электродами с выделенной корневой особенностью.

Рассмотрим статическое состояние плоской деформации пьезоэлектрического полупространства $x \geq 0, |z| < \infty, |y| < \infty$ из пьезокерамики, поляризованной в направлении оси z. Пусть на участках $a < |z| < b$, $x = 0$, $|y| < \infty$ границы полупространства располагаются два ленточных электрода с электрическими потенциалами $\pm V_o$. Предполагаем отсутствие на границе $x = 0$ полупространства с вакуумом механических нагрузок.

Учитывая, что механические нагрузки на границе полуплоскости отсутствуют, а электрод рассматривается как бесконечно тонкий проводящий слой, а также симметричность задачи и то обстоятельство, что электрические постоянные пьезокерамической среды значительно больше постоянных вакуума, можно ограничиться рассмотрением области правой квадранты.

Как известно, поставленная электроупругая задача математически сводится к решению системы, состоящей из уравнений: движения Ньютона (1.72), электростатики (1.73), состояния (1.74) и соотношений (1.75) работы ([2]) со следующими граничными условиями ([3]):

$$\begin{aligned} &\sigma_x(0,z)=0, \quad \tau_{zx}(0,z)=0, \quad 0\le z<\infty,\\ &D_x(0,z)=0, \quad 0\le z<a, \qquad b<z<\infty,\\ &\Psi(0,z)=V_o, \quad a<z<b, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ_x, τ_{zx} — компоненты тензора механических напряжений, D_x — компонент вектора электрической индукции, Ψ — электростатический потенциал.

Решения задачи ищем в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} &U_x(x,z)=-\frac{1}{c_{11}^E}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\sin\beta z d\beta;\\ &U_z(x,z)=\frac{1}{c_{44}^E}\int_0^\infty \beta\overline{W}(\beta,x)\cos\beta z d\beta;\\ &\Psi(x,z)=-\frac{1}{e_{15}}\int_0^\infty \beta\overline{\Psi}(\beta,x)\cos\beta z d\beta, \end{aligned} \tag{2}$$

где U_x, U_z — составляющие вектора упругих перемещений,

$$\begin{aligned} &\overline{U}_x(\beta,x)=\sum_{k=1}^{3}\Delta_1(t_k)t_k e^{-\frac{\beta}{t_k}x}B_k(\beta);\\ &\overline{W}(\beta,x)=\sum_{k=1}^{3}\Delta_2(t_k)e^{-\frac{\beta}{t_k}x}B_k(\beta);\\ &\overline{\Psi}(\beta,x)=\sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)e^{-\frac{\beta}{t_k}x}B_k(\beta). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $B_k(\beta)$ — произвольные функции интегрирования, которые нужно определить из граничных условий задачи (1). Коэффициенты формулы (3) определяются:

$$\begin{aligned} &\Delta_1(t_k)=\kappa t_k^2+\kappa_1;\\ &\Delta_2(t_k)=\eta t_k^4+\eta_1 t_k^2+1;\\ &\Delta_3(t_k)=\nu t_k^4+\nu_1 t_k^2+1, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\kappa=\left(\frac{e_{31}}{e_{15}}+1\right)\frac{c_{33}^{E}}{c_{44}^{E}}-\left(\frac{c_{13}^{E}}{c_{44}^{E}}+1\right)\frac{e_{33}}{e_{15}}\ ;$$

$$\kappa_1=\frac{c_{13}^{E}}{c_{44}^{E}}\cdot\frac{e_{33}}{e_{15}}\ ;$$

$$\eta_1=\left(\frac{e_{31}}{e_{15}}+1\right)\left(\frac{c_{13}^{E}}{c_{11}^{E}}+\frac{c_{44}^{E}}{c_{11}^{E}}\right)-\frac{c_{44}^{E}}{c_{11}^{E}}\cdot\frac{e_{33}}{e_{15}}\ ;$$

$$\eta=\frac{c_{44}^{E}}{c_{11}^{E}}\cdot\frac{e_{33}}{e_{15}}\ ; \tag{5}$$

$$\nu=\frac{c_{33}^{E}}{c_{11}^{E}}\ ;$$

$$\nu_1=\left(\frac{c_{13}^{E}}{c_{44}^{E}}+1\right)\left(\frac{c_{13}^{E}}{c_{11}^{E}}+\frac{c_{44}^{E}}{c_{11}^{E}}\right)-\frac{c_{44}^{E}}{c_{11}^{E}}-\frac{c_{33}^{E}}{c_{44}^{E}}\ ,$$

а t_k определяется из следующего бикубического уравнений:

$$t^6-Pt^4+Qt^2-R=0\,. \tag{6}$$

Здесь

$$P=\left(\frac{e_{33}}{c_{44}^{E}}\eta+\frac{\varepsilon_{33}^{s}}{e_{15}}\nu\right)^{-1}\left[\left(\frac{e_{31}}{c_{11}^{E}}+\frac{e_{15}}{c_{11}^{E}}\right)\kappa-\frac{e_{33}}{c_{44}^{E}}\eta_1+\frac{e_{15}}{c_{44}^{E}}\eta-\frac{\varepsilon_{33}^{s}}{e_{15}}\nu_1+\frac{\varepsilon_{11}^{s}}{e_{15}}\nu\right];$$

$$Q=\left(\frac{e_{33}}{c_{44}^{E}}\eta+\frac{\varepsilon_{33}^{s}}{e_{15}}\nu\right)^{-1}\left[\left(\frac{\varepsilon_{33}^{s}}{e_{15}}+\frac{e_{33}}{c_{44}^{E}}\right)-\left(\frac{e_{31}}{c_{11}^{E}}+\frac{e_{15}}{c_{44}^{E}}\right)\kappa_1-\frac{e_{15}}{c_{44}^{E}}\eta_1-\frac{\varepsilon_{11}^{s}}{e_{15}}\nu_1\right]; \tag{7}$$

$$R=\left(\frac{e_{33}}{c_{44}^{E}}\eta+\frac{\varepsilon_{33}^{s}}{e_{15}}\nu\right)^{-1}\left(\frac{e_{15}}{c_{44}^{E}}+\frac{\varepsilon_{11}^{s}}{e_{15}}\right).$$

Используемые обозначения для упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных материала указаны в ([4]). Имея в виду (2), (3) и основные соотношения электроупругости в декартовой системе координат ([2]), можно все компоненты сопряженного электроупругого поля выразить через $B_k(\beta)$. Потом, удовлетворяя граничным условиям (1), получаем ([5]):

$$B_k(\beta)=C_k B_1(\beta)\ , \tag{8}$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty B(\beta)\cos\beta z d\beta = 0 & 0 < z < a, \\
\int\limits_0^\infty \frac{B(\beta)}{\beta}\cos\beta z d\beta = -\frac{e_{15}}{n_1}V_o & a \le z \le b, \\
\int\limits_0^\infty B(\beta)\cos\beta z d\beta = 0 & b < z < \infty,
\end{cases}
\tag{9}
$$

где

$$
B(\beta) = \beta^2 B_1(\beta) ; \tag{10}
$$

$$
C_1 = 1 ; \; C_2 = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}} ; \; C_3 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}} ;
$$

$$
\begin{gathered}
a_{1k} = \Delta_1(t_k) - \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E}\Delta_2(t_k) + \frac{e_{31}}{e_{15}}\Delta_3(t_k) ; \\
a_{2k} = \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E}\Delta_1(t_k)t_k + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} - \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} ;
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$
n_1 = \sum_{k=1}^{3}\Delta_3(t_k)C_k .
$$

Решение тройного интегрального уравнения (9) ищем в виде

$$
B(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{2n}(\beta b) . \tag{12}
$$

Здесь B_n — неизвестные пока коэффициенты, подлежащие определению; $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом. После подстановки (12) в (9), изменения порядка интегрирования и суммирования, с учетом интеграла Вебера-Шефхейптлина ([5]), "тройное" интегральное уравнений сводится к парным тригонометрическим рядовым уравнениям

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left[2n\arcsin\left(\frac{z}{b}\right)\right] = 0 & 0 < z < a , \\
\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n}\cos\left[2n\arcsin\left(\frac{z}{b}\right)\right] = -\frac{e_{15}}{n_1}V_o & a \le z \le b .
\end{cases}
\tag{13}
$$

Обозначая

$$
z = b\cos\frac{\theta}{2} ; \; a = b\cos\frac{\lambda}{2} \tag{14}
$$

и интегрируя первое уравнение (13) по θ в пределах от λ до π, а второе от θ до λ, получим

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{B_n}{n} \sin n\theta = -\dfrac{e_{15}}{n_1} V_o \theta & 0 \le \theta \le \lambda \, , \\
\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta = 0 & \lambda < 0 < \pi \, .
\end{cases}
\tag{15}
$$

Используя результаты ([6]), из (15) получаем

$$
B_n = -4 \frac{e_{15}}{n_1} V_o \cdot n \sin^2 \frac{\lambda}{2} F\left(1+n;\ 1-n;\ 2;\ \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) , \tag{16}
$$

где $F(\alpha;\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрический ряд. Используя (16), (12), (10), (8) и основные соотношения электроупругости ([2]), можно определить все искомые компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости.

Институт механики НАН Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Վ. Ա. ԲԵԺԱՆՅԱՆ

Երկու եզրային էլեկտրոդներով պյեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգական խնդիրը

Աշխատանքում ստացված է պյեզոկերամիկ կիսահարթության համար էլեկտրաառաձգական խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ կիսահարթության եզրի վրա տեղադրված են ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված պոտենցիալներով երկու ժապավենաձև էլեկտրոդներ: Ենթադրվում է, որ նախնական բևեռացման ուղղությունը զուգահեռ է կիսահարթության եզրին, որը ազատ է արտաքին մեխանիկական լարումներից: Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով: Ինտեգրման կամայական ֆունկցիաների որոշումը բերվել է ըստ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների եռակի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը լուծվել է փակ տեսքով: Ստացված են անալիտիկ բանաձևեր էլեկտրոդների վրա էլեկտրական լիցքերի բաշխման խտության և էլեկտրոդների տակ նորմալ մեխանիկական լարումների համար անջատված եզակիությամբ:

ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б.А.Кудрявцев,* Проблема прочности, №7, с.56-59, 1982. [2] *В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко, Н.А.Шульга,* Электроупругость, Киев, Наукова думка, 1989. [3] *А.Ф.Улитко,* в кн.: Современные проблемы механики и авиации, М., Наука, с.290-300, 1982. [4] *А.Ф.Улитко,* Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып.15, с.90-99 (1975). [5] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик,* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Изд. физ.-мат. лит., 1971. [6] *C.J.Tranter,* Proc. Glasgow Math. Assoc., 4, part 2, p.49-57, 1959.