ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с внутренним вертикальным конечным разрезом

(Представлено академиком НАН Армении Б. Л. Абрамяном 16/X 1995)

В работе рассматривается плоская контактная задача для упругой ортотропной полуплоскости $(x \geq 0)$ с внутренним вертикальным конечным разрезом $(a < x < b)$. На конечном участке границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза $(z = 0)$.

Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от касательных внешних напряжений, а в разрезе действует только нормальное давление.

Рассматривается плоское деформированное состояние $(-\infty < y < \infty)$, и задача решается в перемещениях методом Фурье. Решение представлено в виде суммы интегралов Фурье. Отыскание произвольных функций интегрирования в конченом счете сводится к решению системы из "парных" и "тройных" интегральных уравнений. Эта система, в свою очередь, сводится к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В частных случаях, когда $a \to 0$ или $b \to \infty$, соответственно получаются контактные задачи плоской теории упругости для ортотропной полуплоскости с вертикальными конечным или полубесконечным разрезом.

Так как задача симметрична относительно оси $z = 0$, то можно ограничиться рассмотрением только квадранта $(0 < x < \infty,\ 0 < z < \infty)$.

Граничные условия для квадранта имеют вид:

$$\tau_{zx}(o,z)=0,\ 0<z<\infty;\ \tau_{zx}(x,0),\ 0<x<\infty;$$
$$U_x(0,z)=f_1(z),\ 0<z\le c;\ \sigma_x(o,z)=f_2(z),\ c<z\le\infty; \quad (1)$$
$$U_z(x,0)=0,\ 0<x\le a;\ b\le x<\infty;\ \sigma_z(x,0)=f_3(x),\ a<x<b.$$

Решение задачи ищем в виде сумм интегралов Фурье:

$$U_x(x,z)=\frac{1}{c_{11}}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha+\frac{1}{c_{11}}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\cos\beta z d\beta$$
$$U_z(x,z)=\frac{1}{c_{44}}\int_0^\infty \alpha\overline{U}(\alpha,z)\sin\alpha x d\alpha+\frac{1}{c_{44}}\int_0^\infty \beta\overline{U}(\beta,x)\cos\beta z d\beta \quad (2)$$

где

$$\overline{U}(\alpha,z)=\sum_{j=1}^{2}\Delta_1(t_j)A_j(\alpha)e^{-\alpha t_j z};\ \overline{U}(\beta,x)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_1(t_k)t_k^{-2}B_k(\beta)e^{-\beta t_k^{-1}x};$$
$$\overline{W}(\alpha,z)=\sum_{j=1}^{2}\Delta_2(t_j)A_j(\alpha)e^{-\alpha_j t_j z};\ \overline{W}(\beta,x)=\sum_{k=1}^{2}\Delta_2(t_k)B_k(\beta)e^{-\beta t_k^{-1}x}; \quad (3)$$

Здесь $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$ – неизвестные функции интегрирования, которые нужно определить из условий (1), а плотности, входящие в (3), определяются по формулам:

$$\Delta_1(t_k)=\left(\frac{c_{13}}{c_{44}}+1\right)t_k;\ \Delta_2(t_k)=1-\frac{c_{44}}{c_{11}}t_k^2. \quad (4)$$

Из решения биквадратного уравнения

$$\frac{c_{33}}{c_{11}}t^4+\left(\frac{c_{13}^2}{c_{44}}+2\frac{c_{13}}{c_{11}}-\frac{c_{13}}{c_{44}}\right)t^2+1=0. \quad (5)$$

где c_{11}, c_{13}, c_{33} и c_{44} – модули упругости материала, определяется t_k.

Используя основные соотношения теории упругости [1] для исследуемой среды и (2), (3), можно все компоненты тензора напряжений выразить через $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$.

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем [2]:

$$A_j(\alpha)=a_j A_1(\alpha);\ B_k(\beta)=b_k B_1(\beta),$$
$$\begin{cases}\int_0^\infty \beta B_1(\beta)\mathrm{Cos}\beta z d\beta=\frac{c_{11}}{n_{11}}f_1(z) & 0<z\le c\\ \int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)\mathrm{Cos}\beta z d\beta=\frac{1}{n_{12}}f_2(z)-\frac{1}{n_{12}}\sum_{j=1}^{2}a_{2j}a_j\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)e^{-\alpha t_j z}d\alpha & c<z<\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\mathrm{Cos}\,\alpha x\,d\alpha = 0 \quad 0 < x \le a \\ \int\limits_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\mathrm{Cos}\,\alpha x\,d\alpha = \frac{1}{m_{12}} f_3(x) - \frac{1}{m_{12}} \sum_{k=1}^{2} b_{3k} b_k \int\limits_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) e^{-\beta t_k^{-1} x} d\beta \quad a < x < b \\ \int\limits_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\mathrm{Cos}\,\alpha x\,d\alpha = 0 \quad b \le x < \infty \end{cases} \tag{6}$$

Здесь

$$a_1 = 1;\ a_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}};\ b_1 = 1;\ b_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}};$$

$$a_{1j} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \Delta_1(t_j) t_j + \Delta_2(t_j);\ b_{1k} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \Delta_1(t_k) t_k^{-2} - \Delta_2(t_k) t_k^{-1}.$$

$$n_{11} = \sum_{k=1}^{2} \Delta_1(t_k) t_k^{-2} b_k;\ b_{2k} = -\Delta_1(t_k) t_k^{-3} + \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_k);$$

$$n_{12} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} b_k;\ a_{2j} = \Delta_1(t_j) - \frac{c_{13}}{c_{44}} \Delta_2(t_j) t_j; \tag{7}$$

$$m_{12} = \sum_{j=1}^{2} a_{3j} a_j;\ a_{3j} = \frac{c_{13}}{c_{11}} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_j);$$

$$b_{3k} = -\frac{c_{13}}{c_{11}} \Delta_1(t_j) t_k^{-3} + \frac{c_{33}}{c_{44}} \Delta_2(t_j).$$

Подобные системы из "парных" и "тройных" интегральных уравнений (6) рассматривались в работах ([3,4]) и др.

Используя результаты ([3]), из (6) получаем

$$B_1(\beta) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}\int\limits_0^c \varphi_1(r) J_1(\beta r) dr + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}\int\limits_c^\infty \varphi_2(r) J_1(\beta r) dr + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta}\int\limits_0^c F_1(r) J_1(\beta r) dr \tag{8}$$

$$A_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_k J_{2n+1}(b\alpha); \tag{9}$$

где

$$\varphi_1(r) = -r\frac{d}{dr}\frac{c_{11}}{n_{11}}\int_0^r \frac{f_1(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}}dz\ ;\ \varphi_2(z) = -\frac{1}{n_{12}}\int_c^\infty \frac{zf_2(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}}dz\ ;$$

$$F_1(r) = \frac{r}{n_{12}}\sum_{j=1}^{2} a_{2j}a_j \int_o^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)K_1(\alpha a_j r)d\alpha;$$

$$A_n = \frac{2n+1}{\pi\sqrt{2}}\int_\beta^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \int_\theta^\pi \frac{G(\varphi)}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}d\varphi; \tag{10}$$

$$G(\varphi) = -\int_\varphi^\pi \varphi_3(b\sin\varphi/2)d\varphi + \frac{1}{m_{12}}\sum_{k=1}^{2} b_{3k}b_k \int_\varphi^\pi d\varphi \int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta)e^{-\beta_k^{-1}b\sin\varphi/2}d\beta + c_1;$$

$$\varphi_3(b\sin\varphi/2) = \frac{1}{m_{12}}f_3(b\sin\varphi/2);\ c_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n;$$

$$\varphi = 2\arcsin\frac{x}{b};\ \beta = 2\arcsin\frac{a}{b}.$$

Здесь $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода от действительного аргумента; $K_\nu(z)$ – функции Макдональда; $P_n(z)$ – полином Лежандра.

Имея в виду (8), (9) и (10), исключая $B_1(\beta)$ и производя замену неизвестных

$$(2n+1)G_n = \sqrt{2}\pi A_n\ , \tag{11}$$

для определения G_n получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$G_n = \Omega_n + \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn}G_m\ , \tag{12}$$

где введены обозначения:

$$\Omega_n = \int_\beta^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \int_\theta^\pi \frac{N(\varphi)}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}d\varphi; \tag{13}$$

$$K_{mn} = \int_\beta^\pi P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta \int_\theta^\pi \frac{M_m(\varphi)}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}d\varphi. \tag{14}$$

Здесь

$$N(\varphi) = -\int\limits_{\varphi}^{\pi} \varphi_3(b\sin\varphi/2)d\varphi +$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{m_{12}}\sum_{k=1}^{2} b_{3k}b_k \int\limits_{\varphi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{c} \frac{r\varphi_1(r)}{\left[(bt_k^{-1}\sin\varphi/2)^2 + r^2\right]^{3/2}}dr +$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{m_{12}}\sum_{k=1}^{2} b_{3k}b_k \int\limits_{\varphi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{c}^{\infty} \frac{r\varphi_2(r)}{\left[(bt_k^{-1}\sin\varphi/2)^2 + r^2\right]^{3/2}}dr; \tag{15}$$

$$M_m(\varphi) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{m_{12}}\cdot\frac{(2m+1)^2}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{2} b_{3k}b_k \cdot \sum_{j=1}^{2} a_{2j}a_j \cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\varphi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{c}^{\infty} \frac{r^2 B_m(t_j r)}{\left[(bt_k^{-1}\sin\varphi/2)^2 + r^2\right]^{3/2}}dr,$$

а $B_m(t_j r)$ определяется по формуле

$$B_m(t_j r) = \frac{\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot(2m-1)!!\cdot(2m-1)!!}{2^{2(1-m)}\cdot m\cdot(t_j r)^{2(m+1)}\cdot(2m+1)\cdot(2m-1)!}\cdot$$

$$F\left(\frac{2m+3}{2},\frac{2m-1}{2};2(m+1);-\left(\frac{b}{t_j r}\right)^2\right),$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;r)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Исходя из результатов ([3]) показано, что система (12) вполне регулярна. Решая (12) методом последовательных приближений, коэффициенты G_n можно определить с любой точностью. Далее по формулам (11), (9), (8) и (6) можно определить все неизвестные функции и, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

В частности, напряжения под штампом и вне разреза определяются по формулам:

$$\sigma_x(0,z) = -\frac{2n_{12}}{\pi}\left[\frac{\varphi_1(c)}{\sqrt{c^2-z^2}} + \frac{\varphi_2(c)}{\sqrt{c^2-z^2}} + \frac{F_1(c)}{\sqrt{c^2-z^2}}\right] +$$

$$+\frac{2n_{12}}{\pi}\left[\int\limits_{z}^{c}\frac{\varphi_1'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr + \int\limits_{c}^{\infty}\frac{\varphi_2'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr + \int\limits_{c}^{\infty}\frac{F_1'(r)}{\sqrt{r^2-z^2}}dr\right] + \tag{17}$$

$$+\sum_{j=1}^{2} a_{2j}a_j \int\limits_{0}^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha)e^{-\alpha t_j z}d\alpha\ ;\ 0<z<c;$$

$$
\sigma_z(x,0)=\frac{m_{12}}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2G_n\cos\left[(2n+1)\arcsin\frac{x}{b}\right]+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{2}b_{3k}b_k\int_0^{\infty}\beta^2B_1(\beta)e^{-\beta s_k^{-1}x}d\beta\,;\;0<x<a \tag{18}
$$

$$
\sigma_z(x,0)=\frac{m_{12}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-b^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2b^{2n+1}G_n\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2}}{\left(x+\sqrt{x^2-b^2}\right)^{2n+1}}+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{2}b_{3k}b_k\int_0^{\infty}\beta^2B_1(\beta)e^{-\beta s_k^{-1}x}d\beta\,;\;b<x<\infty. \tag{19}
$$

Здесь

$$
F_1(r)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{r}{n_{12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{j=1}^{2}a_{2j}a_j\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2G_n\cdot B_n(t_j r)\,;
$$

$$
A_1(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\alpha^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2G_n\cdot J_{2n+1}(b\alpha)\,;
$$

$$
B_1(\beta)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\int_0^c\varphi_1(r)J_1(\beta r)dr+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\int_c^{\infty}\varphi_2(r)J_1(\beta r)dr+
$$

$$
+\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{2}a_{2j}a_j\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)^2G_m\int_c^{\infty}rJ_1(\beta r)B_m(t_j,r)dr\,.
$$

Институт механики НАН Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Ներքին ուղղահայաց վերջավոր ճեղքով օրթոտրոպ կիսահարթության համար համաչափ կոնտակտային խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է ներքին ուղղահայաց վերջավոր ճեղքով օրթոտրոպ կիսահարթության համար հարթ կոնտակտային խնդիր: Կիսահարթության եզրի վերջավոր մասի վրա կիրառված է ճեղքի առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված կոշտ դրոշմ: Ենթադրվում է, որ շփումը կիսահարթության և դրոշմի միջև բացակայում է:

Պարզության համար ընդունվում է, որ կիսահարթության եզրը դրոշմից դուրս ազատ է արտաքին շոշափող լարումներից, իսկ ճեղքի ափերի վրա ազդում է միայն նորմալ ճնշում:

Դիտարկվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակ և խնդիրը լուծվում է տեղափոխումներով Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով:

Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը սկզբում հանգել է զույգ և եռակի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, իսկ հետագայում ռեգուլյար գծային հանրահաշվական անվերջ հավասարումների համակարգի լուծմանը:

Ստացված են անալիտիկ բանաձևեր դրոշմի տակ և ճեղքից դուրս նորմալ լարումների համար, անջատված եզակիությամբ:

Մասնավոր դեպքում ստացված են դեպի եզր դուրս եկող վերջավոր և եզրից վերջավոր հեռավորությամբ կիսաանվերջ ուղղահայաց ճեղքերով օրթոտրոպ կիսահարթության հարթ կոնտակտային խնդիրների լուծումները:

ЛИТЕРАТУРА-ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Р.Кристенсен.* Введение в механику композитов. М., Мир, 1982. 2 *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971. 3 *В.С.Тоноян, С.А.Мелкумян.* ДАН АрмССР, т.LXL, №2, с.122-127 (1977). 4 *Я.С.Уфлянд.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., Наука, 1977