ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

М. А. Агаловян

Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии

(Представлено академиком НАН Армении А.Б.Нерсесяном 15/XII 1995)

1. Существует множество физических задач, решение которых сводится к решению задачи на собственные значения дифференциальных операторов ([1]). К ней, в частности, приводится задача определения частот собственных колебаний сооружений при сейсмическом воздействии. Точное определение этих частот позволяет при надлежащем выборе основания сооружения избежать резонансных явлений.

Рассмотрим следующую типичную задачу. Требуется определить ненулевое решение однородных динамических уравнений теории упругости ортотропного тела ([2,3])

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy} \tag{1.1}$$

в полосе $\Omega=\left\{x,y:x\in[0;l],|y|\le h;h<<l\right\}$ при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{xy}(h)=\sigma_y(h)=0\,, \tag{1.2}$$

$$u(-h)=v(-h)=0\,, \tag{1.3}$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, u, v — компоненты вектора перемещения, a_{ik} — упругие постоянные податливости, ρ — плотность среды.

Условиям при $x=0,l$ в подобных задачах соответствует решение типа пограничного слоя, т.е. решение, быстро затухающее при удалении от торцов в глубь полосы. Это решение строится и изучается отдельно ([4]).

К условиям (1.2), (1.3) присоединяются начальные условия:

$$u(x,y,t)/_{t=0}=u_o(x,y),\ v(x,y,t)/_{t=0}=v_o(x,y);$$
$$\dot u(x,y,t)/_{t=0}=\bar u(x,y),\ \dot v(x,y,t)/_{t=0}=\bar v(x,y), \tag{1.4}$$

где точками обозначены производные по времени t.

Частное решение однородной системы (1.1) при однородных условиях (1.2), (1.3) будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta}=Q_{jk}(x,y)\exp(i\omega t),\quad \alpha,\beta=x,y;\ j,k=1,2, \tag{1.5}$$

т.е.

$$\sigma_{xy}=\sigma_{12}(x,y)e^{i\omega t},\ \sigma_x=\sigma_{11}(x,y)e^{i\omega t},\ \sigma_y=\sigma_{22}(x,y)e^{i\omega t},$$
$$u(x,y,t)=u_1(x,y)e^{i\omega t},\ v(x,y,t)=v_1(x,y)e^{i\omega t}. \tag{1.6}$$

Чтобы решить систему, получающуюся после подстановки (1.6) в (1.1), перейдем к безразмерным переменным и безразмерным компонентам вектора перемещения по формулам:

$$\xi=x/l,\ \zeta=y/h,\ U_1=u_1/l,\ V_1=v_1/l.$$

В результате придем к системе

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2U_1=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2V_1=0,$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}, \tag{1.7}$$
$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_1}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12},\quad \varepsilon=h/l,\ \omega_*^2=\rho\omega^2h^2.$$

Система (1.7) сингулярно возмущена малым параметром ε. Ее решение складывается из решений внутренней задачи и пограничного слоя [5,6]. Решение внутренней задачи, которое является основным, ищем в виде

$$Q_{jk}=\varepsilon^{\chi_{jk}+s}Q_{jk,s},\ s=\overline{0,N}, \tag{1.8}$$

где Q_{jk} – любая из искомых величин, χ_{jk} – целые числа, характеризующие порядок соответствующих величин. Они определяются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q_{jk,s}$. Поставленная цель достигается, если $\chi_{jk}=-1$ для напряжений, а для перемещений $\chi_{jk}=0$, т.е.

$$\sigma_{11}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{11,s},\ \sigma_{12}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{12,s},\ \sigma_{22}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{22,s},$$
$$U_1=\varepsilon^sU_{1,s},\ V_1=\varepsilon^sV_{1,s},\ s=\overline{0,N}. \tag{1.9}$$

Подставив (1.9) в (1.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим:

$$\frac{\partial\sigma_{11,s-1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12,s}}{\partial\zeta}+\omega_*^2U_{1,s}=0\,,\quad \frac{\partial\sigma_{12,s-1}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22,s}}{\partial\zeta}+\omega_*^2V_{1,s}=0\,,$$

$$\frac{\partial U_{1,s-1}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11,s}+a_{12}\sigma_{22,s},\quad \frac{\partial V_{1,s}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11,s}+a_{22}\sigma_{22,s},\tag{1.10}$$

$$\frac{\partial U_{1,s}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_{1,s-1}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12,s}\,.$$

В (1.9) считается, что $Q_{jk,m}=0$, если $m<0$.

Из системы (1.9) вытекают следующие рекуррентные формулы для последовательного определения всех величин $Q_{jk,s}$:

$$\sigma_{12,s}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U_{1,s}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V_{1,s-1}}{\partial\xi}\right);$$

$$\frac{\partial^2U_{1,s}}{\partial\zeta^2}+a_{66}\omega_*^2U_{1,s}=-\frac{\partial^2V_{1,s-1}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{66}\frac{\partial\sigma_{11,s-1}}{\partial\xi}\;;$$

$$\sigma_{11,s}=\frac{1}{a_{11}}\frac{\partial U_{1,s-1}}{\partial\xi}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_{22,s}\;;\tag{1.11}$$

$$\sigma_{22,s}=\frac{1}{A_{11}}\left(\frac{\partial V_{1,s}}{\partial\zeta}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial U_{1,s-1}}{\partial\xi}\right);$$

$$A_{11}=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)/a_{11}\;;$$

$$\frac{\partial^2V_{1,s}}{\partial\zeta^2}+A_{11}\omega_*^2V_{1,s}=\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial^2U_{1,s-1}}{\partial\xi\partial\zeta}-A_{11}\frac{\partial\sigma_{12,s-1}}{\partial\xi}\,.$$

2. Остановимся более подробно на важном случае $s=0$. При этом имеем

$$\sigma_{12,0}=\frac{1}{a_{66}}\frac{\partial U_{1,0}}{\partial\zeta}\,,\quad \frac{\partial^2U_{1,0}}{\partial\zeta^2}+a_{66}\omega_*^2U_{1,0}=0\,,\tag{2.1}$$

$$\sigma_{11,0}=-\frac{a_{12}}{a_{11}}\sigma_{22,0}\,,\quad \sigma_{22,0}=\frac{1}{A_{11}}\frac{\partial V_{1,0}}{\partial\zeta}\,,\quad \frac{\partial^2V_{1,0}}{\partial\zeta^2}+A_{11}\omega_*^2V_{1,0}=0\,.\tag{2.2}$$

Известно [3], что $a_{ii}>0;\ a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2>0$.

Функцию $U_{1,0}$ будем искать в виде

$$U_{1,0}=u_{1,0}(\xi)\bar{u}_{1,0}(\zeta)\,.$$

Тогда легко видеть, что

$$U_{1,0}=u_{1,0}(\xi)\left(C_1\sin\omega_*\sqrt{a_{66}}\zeta+C_2\cos\omega_*\sqrt{a_{66}}\zeta\right).\tag{2.3}$$

Вычислив $\sigma_{12,0}$ и удовлетворив граничным условиям (1.2) и (1.3) относительно σ_{ij} и u, получим однородную алгебраическую систему относительно произвольных постоянных C_1, C_2. Из условия существования ненулевого решения этой системы вытекает, что $\cos 2\omega_* \sqrt{a_{66}} = 0$, т.е.

$$\omega_{*n} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{66}}}(2n+1) \ , \ n = 0,1,\dots \ ,$$

а также $C_1 = C_2 \operatorname{tg}\omega_* \sqrt{a_{66}}$.

Учитывая, что $\omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2$, для частот собственных колебаний будем иметь

$$\omega_n = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{66}}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h}\sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}}(2n+1) \ , \ n = 0,1,\dots \ , \tag{2.4}$$

где $G_{12} = \dfrac{1}{a_{66}}$ – модуль сдвига. Величина $V_s = \sqrt{\dfrac{G_{12}}{\rho}}$ – хорошо известная в теории упругости и сейсмологии скорость распространения в бесконечной среде сдвиговых или S-волн [2,7].

Таким образом, условиями $\sigma_{n}(h) = 0$, $u(-h) = 0$ в полосе возбуждаются собственные сдвиговые колебания с частотой (2.4).

Используя (2.3), нетрудно доказать ортогональность собственных функций

$$\int_{-1}^{1} \bar{u}_{1,0n}(\zeta)\bar{u}_{1,0m}(\zeta)d\zeta = \begin{cases} 0 \ , \ n \neq m \\ 2 \ , \ n = m \end{cases}$$

Точно так же из (2.2) вытекает:

$$V_{1,0} = v_{1,0}(\xi)\left(C_3 \sin\sqrt{A_{11}}\,\omega_*\zeta + C_4 \cos\sqrt{A_{11}}\,\omega_*\zeta\right) ;$$

$$\sigma_{22,0} = v_{1,0}(\xi)\frac{\omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\left(C_3 \cos\sqrt{A_{11}}\,\omega_*\zeta - C_4 \sin\sqrt{A_{11}}\,\omega_*\zeta\right) .$$

Удовлетворив остальным условиям (1.2) и (1.3), получим:

$$\cos 2\sqrt{A_{11}}\,\omega_* = 0 \ , \ \text{т.е.} \ \ \omega_* = \frac{\pi}{4\sqrt{A_{11}}}(2n+1) \ ,$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho A_{11}}}(2n+1) \ , \ n = 0,1,\dots \ , \tag{2.5}$$

где $V_p = \dfrac{1}{\sqrt{\rho A_{11}}} = \sqrt{\dfrac{E_2}{\rho(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})}}$ – хорошо известная в сейсмологии скорость распространения продольных волн.

Если в V_p пренебречь коэффициентом Пуассона υ_{jk}, то получим известную скорость распространения продольных волн в стержне.

Отметим, что система $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}V_{1,0n}\right\}$ также ортогональна.

Таким образом, условиями (1.2) и (1.3) в полосе (фундаменте) порождаются два типа собственных колебаний с частотами (2.4) и (2.5), существенно зависящими как от скоростей распространения продольных и сдвиговых волн, так и от ширины полосы.

Известно ([7]), что сейсмические волны имеют периоды $(T = 2\pi / \omega)$ в пределах $10^{-2} - 10^{2}$ с. При этом сильным землетрясениям соответствуют периоды $\sim 10^{2}$ с. Формулы (2.4) и (2.5) показывают, что путем надлежащего подбора материала полосы (фундамента) и величины ее ширины (толщины) можно избежать резонансных явлений, тем самым уменьшив отрицательное влияние сейсмических волн.

3. При $s > 0$ уравнения относительно $U_{1,s}$ и $V_{1,s}$ и соответствующие им решения, согласно (1.11), взаимно зависимы и ими будут описываться взаимные влияния продольных и сдвиговых собственных колебаний. Решения, соответствующие собственным значениям (2.4), обозначим индексом c, а соответствующие значениям (2.5) – индексом p. Любая из величин будет иметь вид $Q = Q^{c} + Q^{p}$. В частности,

$$\begin{gathered}\sigma_{12,0}^{c} \neq 0\,,\ U_{1,0}^{c} \neq 0\,,\ \sigma_{11,0}^{c} = \sigma_{22,0}^{c} = V_{1,0}^{c} \equiv 0\,,\\ \sigma_{12,0}^{p} = U_{1,0}^{p} \equiv 0\,,\ \sigma_{11,0}^{p} \neq 0\,,\ \sigma_{22,0}^{p} \neq 0\,,\ V_{1,0}^{p} \neq 0\,.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Можно показать:

$$U_{1,s} = C_{s,2}^{c}(\xi)\left(\operatorname{tg}\omega_{*}^{c}\sqrt{a_{66}}\sin\omega_{*}^{c}\sqrt{a_{66}}\zeta + \cos\omega_{*}^{c}\sqrt{a_{66}}\zeta\right) + U_{1,s}^{p}\,;$$

$$V_{1,s} = C_{s,4}^{p}(\xi)\left(\operatorname{tg}\omega_{*}^{p}\sqrt{A_{11}}\sin\omega_{*}^{p}\sqrt{A_{11}}\zeta + \cos\omega_{*}^{p}\sqrt{A_{11}}\zeta\right) + V_{1,s}^{c}\,,$$

где $U_{1,s}^{p}, V_{1,s}^{c}$ – известные функции, определяемые из условий (1.2), (1.3) после их удовлетворения для S-ого приближения, т.е. построение последующих приближений не приводит к появлению принципиально новых групп постоянных интегрирования, остающихся неизвестными.

Поскольку собственные функции задачи составляют ортогональную систему, нетрудно удовлетворить начальным условиям (1.4), разложив функции, стоящие в правых частях этих условий, в ряды Фурье по этим функциям.

В заключение отметим, что предложенный в работе подход можно использовать для определения собственных значений, а следовательно, и частот в задаче собственных колебаний в пространственном случае, а также изучения динамики сейсмического воздействия.

Институт математики НАН Армении

Մ Լ ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ

Սեփական արժեքների որոշման մի խնդրի մասին սեյսմոլոգիայում

Դիտարկված է սեփական արժեքների որոշման խնդիր, հիմք ընդունելով մաթեմատիկական առաձգականության տեսության դինամիկական հավասարումները:

Այն դեպքում, երբ տիրույթն իրենից ներկայացնում է օրթոտրոպ շերտ, որոշված են սեփական արժեքները և համապատասխան սեփական ֆունկցիաները:

Ապացուցված է, որ սեփական ֆունկցիաները կազմում են օրթոգոնալ համակարգ: Արտածված են կապեր որոշված սեփական արժեքների և շերտի սեփական տատանումների հաճախությունների միջև: Ստացված են բանաձևեր, որոնք կապ են հաստատում շերտի սեփական տատանումների հաճախությունների և սեյսմոլոգիայում հայտնի սահքային ու երկայնական ալիքների արագությունների, ինչպես նաև շերտի հաստության միջև: Ուսումնասիրությունը կատարված է սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով: Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր լարումների տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար: Ստացված արդյունքները կարող են օգտագործվել սեյսմակայուն շինարարության մեջ՝ մասնավորապես օգտագործելով վերը ստացված բանաձևերը կարելի է հասնել նրան, որ սեյսմիկ ազդեցության դեպքում կառույցի հիմքը զերծ մնա ռեզոնանսային վիճակ ընկնելուց:

ЛИТЕРАТУРА-ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л.Коллатц*, Задачи на собственные значения, М., Наука, 1968. [2] *И.Н.Снеддон, Д.С.Берри*, Классическая теория упругости, М., Физматгиз, 1961. [3] *С.Г.Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, М., Наука, 1977. [4] *Л.А.Агаловян*, Межвузовский сб. "Механика", изд. ЕГУ, вып.3 (1984). [5] *В.Вазов*, Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений, М., Мир, 1968. [6] *А.Б.Васильева, В.Ф.Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., Наука, 1973. [7] *К.Касахара*, Механика землетрясений, М., Мир, 1985.