ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Г. В. Арутюнян

О равномерном приближении квазиполиномами с коэффициентами из заданного множества

(Представлено академиком НАН Армении Н.У.Аракеляном 24/XI 1995)

1°. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty, \{a_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающие последовательности положительных чисел, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \ \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_{n+1} - a_n) < +\infty \ . \tag{1}$$

Квазиполиномом по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty (\lambda_0 = 0, x \geq 0)$ будем называть конечную сумму вида

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} p_n x^{\lambda_n}$$

с произвольными действительными коэффициентами $p_n, n = 0,1,\dots,m$.

Обозначим $C[a,b]$ банахово пространство вещественных непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. По известной теореме Мюнца ([1]) множество всех квазиполиномов по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty$ плотно в пространстве $C[a,b](a \geq 0)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty \ . \tag{2}$$

Возникает вопрос: в какой форме сохранится теорема Мюнца, если у аппроксимирующих квазиполиномов по системе $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty$ допускать коэффициенты только из множества $\{\pm a_n\}_1^\infty$? В настоящей заметке приводятся некоторые результаты по этому вопросу. Отметим, что частный случай указанной задачи, когда $\{a_n\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$ (т.е. рассматривается аппроксимация квазиполиномами с целыми коэффициентами) изучался в ряде работ (см. [2-5]).

2°. Обозначим через $C^*[a,b]$ множество всех функций f из $C[a,b]$, которые удовлетворяют условию $f([a,b]\cap\{0,1\})\subset\{0\}$. Ясно, что $C^*[a,b]$ является подпространством $C[a,b]$, причем $C^*[a,b]=C[a,b]$, если $[a,b]\cap\{0,1\}=\varnothing$.

Теорема 1. *Пусть строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (1) *и строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\log n}=0\,.$$

Тогда какое бы ни взять число b, $b>1$, *произвольную функцию* $f\in C^*[0,b]$ *можно равномерно на* $[0,b]$ *приблизить квазиполиномами вида*

$$p(x)=\sum_{i=1}^{k}\pm a_{n_i}x^{\lambda_i}\,. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел* $\{a_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (1) *и строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\lambda_n/\log n\downarrow a \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Тогда какое бы ни взять число b, *где* $b<e^{\frac{1}{a}}$, *произвольную функцию* $f\in C^*[0,b]$ *можно равномерно на* $[0,b]$ *приблизить квазиполиномами вида* (3).

Замечание 1. В теореме 2 условие $b<e^{\frac{1}{a}}$ является точным (см [3]).

Теорема 3. *Пусть строго монотонно возрастающие последовательности положительных чисел* $\{a_n\}_1^\infty$ *и* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *удовлетворяют соответственно условиям* (1), (2) *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. *Тогда какое бы ни взять число* b, $0<b<1$, *любую функцию* $f\in C^*[0,b]$ *можно равномерно на* $[0,b]$ *приблизить квазиполиномами вида* (3).

Теорема 4. *Пусть строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (2), $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ *и*

$$1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\downarrow 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^2<+\infty.$$

Тогда любую фуккцию $f\in C^*[0,1]$ *можно равномерно на* $[0,1]$ *приблизить квазиполиномами вида* (3).

Замечание 2. Отметим, что теорема 4 обобщает и усиливает некоторые результаты из работ [2,6].

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Տրված բազմությունից գործակիցներով քվազիբազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է $[0,+\infty]$ *կիսաառանցքի կոմպակտ բազմությունների վրա հավասարաչափ մոտարկման հնարավորությունը* $P_n\in\{\pm a_k\}_1^\infty$ *գործակիցներով* $\sum_{n=0}^{m}P_n x^{\lambda_n}$ *տեսքի քվազիբազմանդամներով: Այստեղ դրական թվերի* $\{\lambda_n\}_1^\infty$ *և* $\{a_k\}_1^\infty$ *հաջորդականությունները խիստ մոնոտոն աճող են, ընդ որում* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_{n+1}-a_n)<+\infty$. *Ստացված արդյունքներն ընդհանրացնում են ամբողջ գործակիցներով քվազիմաբազմանդամներով մոտարկման մասին արդեն հայտնիները: Մասնավորաբար, դիտարկվում է մոտարկում* $[0,+\infty]$ *կիսաառանցքի կամայական երկարության հատվածի վրա:*

ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *W.Rudin,* Real and Complex Analysis, Mc. Graw-Hill Book Company, T. London, 1966. [2] *В.А.Мартиросян,* Изв. АН АрмССР, Математика, т.8, №2, с.167-175 (1973). [3] *В.А.Мартиросян,* Мат. заметки, т.27, №2, с.237-243 (1980). [4] *O.Ferguson, M.Golitschek,* Trans. Amer. Math. Soc., v.213, p.115-126 (1975). [5] *J.Tzimbalario,* Can. Math. Bull., v.20, №1, p.129-131 (1977). [6] *А.О.Гельфонд,* УМН, т.21, №3, с.225-229 (1966).