ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

Р. А. Багиян

# Обобщение теоремы Вороновской на случай квазиполиномов типа Бернштейна–Хаусдорфа

(Представлено академиком НАН Армении В.С.Захаряном 31/VII 1995)

1. Известна следующая классическая теорема Вороновской (см. ([1])): *Если функция $f(x)$ имеет в промежутке $[0,1]$ непрерывную производную второго порядка, то имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f(x)-B_n(x;f)\right]=-\frac{1}{2}x(1-x)f''(x), \tag{1}$$

*где*

$$B_n(x;f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

*полиномы Бернштейна.*

Арамэ ([2]) установлена теорема, в некотором смысле обобщающая вышеуказанный результат Вороновской.

Т е о р е м а. *Если функция $f(x)$ имеет в промежутке $[0,1]$ и непрерывна в нем, то имеет место следующее равенство:*

$$f(x)-B_n(x;f)=-\frac{x(1-x)}{n}\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3,f\right], \tag{2}$$

*где $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ — значения из промежутка $[0,1]$, а $\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3,f\right]$ — разделенная разность для функции $f(x)$.*

Далее заметим, что

$$R_n(x^2)=x^2-B_n(x,x^2)=-\frac{x(1-x)}{n}.$$

Следовательно, формула (2) может быть переписана в виде

$$R_n(f)=f(x)-B_n(x;f)=R_n(x^2)\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3,f\right].$$

Из свойств разделенных разностей известно, что если функция имеет непрерывную вторую производную, то

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, f] = \frac{f''(x)}{2!} \; x \in (0,1) .$$

2. Пусть неубывающая последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots , \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty . \tag{3}$$

В работе ([3]) с этой последовательностью были ассоциированы квазиполиномы типа Бернштейна – Хаусдорфа:

$$\mathcal{B}_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} f(\sigma_{n,k})\omega_{n,k}(x) \; ; \; \sigma_{n,k} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}$$

$$\omega_{n,k}(x) = \frac{\prod_{j=k+1}^{n} \lambda_j}{2\pi i} \int_C \frac{e^{x\zeta} d\xi}{\prod_{j=k}^{n} (\xi + \lambda_j)} \tag{4}$$

и установлена их равномерная сходимость к функции $f(x) \in C[0,+\infty]$. В статье ([3]) при доказательстве этой теоремы требовалось, чтобы последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяла условиям (3). Однако, если снова просмотреть доказательство, то можно заметить, что условие возрастания последовательности не нужно. А именно, достаточно требовать лишь следующее:

$$\lambda_0 = 0 \; , \; \lambda_n > 0 \; , \; n = 1,2,\ldots , \; \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty , \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty .$$

Целью данной работы является обобщение теоремы Вороновской, а также Арамэ на случай квазиполиномов типа Бернштейна – Хаусдорфа ([4]). Устанавливается также свойство монотонности для указанных квазиполиномов и получается оценка остатка

$$R_n(f) = f(x) - \mathcal{B}_n(x;f) .$$

Для того чтобы сформулировать основные результаты, необходимы предварительные сведения.

Поповичиу ([4]) введены обобщенные разделенные разности

$$[x_1, x_2, x_3, f] = V\begin{pmatrix} f_0 \; f_1 \; f \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{pmatrix} : V\begin{pmatrix} f_0 \; f_1 \; f_2 \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{pmatrix} ,$$

где

$$V\begin{pmatrix} f_0 \; f_1 \; f_2 \\ x_1 \; x_2 \; x_3 \end{pmatrix} = \| f_j(x_i) \| , \; j = 0,1,2 \; ; \; i = 1,2,3 ,$$

$i$ – номер строки, $j$ – номер столбца. Функции $f_0, f_1, f_2$ предполагаются непрерывными, линейно независимыми, а $x_1, x_2, x_3$ – узлы интерполяции. Обычные разделенные разности получаются, если принять $f_j = x^j$, $j = 0,1,2$.

Рассмотрим обобщенные разделенные разности Поповичиу в случае

$$f_j = e^{-j\lambda x} \quad (0 < \lambda < \infty)\ j = 0,1,2,\ x \in [0,+\infty].$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$[x_1, x_2, x_3, e^{-\lambda x}] = 0,$$
$$[x_1, x_2, x_3, e^{-2\lambda x}] = 1.$$

Определение. Будем называть функцию $f(x)$ выпуклой, полиномиальной или вогнутой относительно функции $e^{-\lambda x}$, если обобщенная разделенная разность

$$[x_1, x_2, x_3, f] > 0\ ,\ = 0\ ,\ < 0\ .$$

Заметим, что если сделать замену $e^{-\lambda x} = t, t \in [0,1], f(x) = f\left(-\frac{1}{\lambda}\ln t\right) = g(t)$, то получим обычные определения выпуклости, полиномиальности и вогнутости.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C[0,+\infty]$, тогда для квазиполиномов типа Бернштейна – Хаусдорфа имеет место следующее соотношение:*

$$\mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{n+1,k+1}(x) \frac{\lambda_1^2 e^{-2\lambda_1 \tau_{n,k}}}{\lambda_{n+1}} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) [\tau_{n,k-1}, \tau_{n+1,k}, \tau_{n,k}; f], \quad (5)$$

*где $\{\tau_{n,k}\}$ – плотное к узлам интерполяции $\{\sigma_{n,k}\}$ множество. Таким образом, последовательность $\{B_n(f,x)\}, (n \geq 1)$, убывающая, стационарная, возрастающая в зависимости от того, выпуклая $f(x)$, полиномиальная или вогнутая.*

Заметим, что формула (5) в частном случае $\lambda_n = n$ и после замены $e^{-\lambda_1} = t$ перейдет в формулу для классических полиномов С.Н.Бернштейна, полученную Арамэ ([2]).

Т.Поповичиу ([4]) ввел следующее определение: линейный функционал $R(f)$, определенный на $C[a,b]$, имеет *простую форму*, если для всех $f \in C[a,b]$

$$R(f) = K[x_1, x_2, x_3, f],$$

где $K \neq 0$ не зависит от $f$ и различных узлов $x_1, x_2, x_3$.

Им установлен также следующий признак: для того чтобы функционал $R(f)$ имел простую форму, необходимо и достаточно, чтобы $R(f)\neq 0$ для всякой функции $f(x)$, выпуклой относительно функций $\left\{e^{-i\lambda x}\right\}$, $i=0,1,2$, причем

$$R[1]=0\ ,\ R\left[e^{-\lambda x}\right]=0\ ,\ R\left[e^{-2\lambda x}\right]\neq 0\,.$$

Теперь приведем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Для всякой непрерывной функции* $f(x)$ *на* $[0,+\infty]$ *имеет место следующее равенство:*

$$R_n(f;x)=f(x)-\mathcal{B}_n(f;x)=R_n(e^{-2\lambda_1 x})\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3;f\right], \tag{6}$$

*где* $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ *— значения из промежутка* $[0,+\infty]$.

Доказательство. Пусть выпуклая функция $f(x)\in C[0,+\infty]$. Тогда по теореме 1 последовательность квазиполиномов (4) убывающая. С другой стороны, $\mathcal{B}_n(f;x)\Rightarrow f(x)$ на $[0,+\infty]$. Следовательно, $R_n(f)=f(x)-\mathcal{B}_n(f;x)<0$, т.е. $R_n(f)\neq 0$ для выпуклой и непрерывной функции $f(x)$. В силу признака Поповичиу

$$R_n(f;x)=K_n(x)\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3;f\right],$$

где $K_n(x)$ — коэффициент, не зависящий от функции $f(x)$. Возьмем, в частности, $f(x)=e^{-2\lambda_1 x}$. Так как $\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3,e^{-2\lambda_1 x}\right]=1$, то $R_n(e^{-2\lambda_1 x})=$ $=K_n(x)$ и формула (6) установлена. Теорема 2 доказана.

Замечание. Формула (6) теоремы 2 является обобщением известной формулы (1) Вороновской. Действительно, если сделать замену $e^{-\lambda_1 x}=t, f\left(-\dfrac{1}{\lambda_1}\ln t\right)=g(t), t\in[0,1]; R_n\big(g(t)\big)=R_n(t^2)\left[\xi_1',\xi_2',\xi_3';g(t)\right]$. Это формула (2) Арамэ для классических полиномов Бернштейна, откуда в случае дважды непрерывной дифференцируемости функции получается теорема Вороновской (1).

В заключение работы займемся оценкой остатка $R_n(f;x)$. В статье (3) получена оценка остатка для функции $e^{-\lambda x}x^p, p=0,1,2,\ldots$ (см. (3), с.325). Если воспользоваться этой оценкой при $p=0, \lambda=2\lambda_1$, получим

$$R_n(e^{-2\lambda_1 x})=e^{-2\lambda_1 x}-\mathcal{B}_n\left[e^{-2\lambda_1 x},x\right]\leq De^{-\varepsilon\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}}\ ,\ 0<\varepsilon\leq 1\ ,\ D=\mathrm{const}\,.$$

Используя эту оценку в соотношении (6), будем иметь

$$R_n(f;x) = f(x) - \mathcal{B}_n(f;x) \le Ce^{-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \; C = \text{const}.$$

Если $\varepsilon = 1, \lambda_j = j$ и $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \sim \ln n$, то получим классическую оценку приближения полиномами С.Н.Бернштейна (т.е. $0\left(\frac{1}{n}\right)$).

Государственный инженерный университет Армении

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ

**Վորոնովսկայայի թեորեմի ընդհանրացումը Բեռնշտեյն-Հաուսդորֆի տիպի քվազիբազմանդամների համար**

*Ներկա հոդվածում ընդհանրացվում է Վորոնովսկայայի թեորեմը Բեռնշտեյն–Հաուսդորֆի տիպի քվազիբազմանդամների համար: Ապացուցվում է նաև մոնոտոնության հատկությունը այդ քվազիբազմանդամների համար և ստացվում է մնացորդային անդամի գնահատականը: Մասնակի դեպքում ստացվում է հայտնի գնահատականը Բեռնշտեյնի բազմանդամների համար:*

## ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е.В.Ворновская,* ДАН СССР, сер.А, С.79-85 (1932). [2] *О.Арамэ,* Mathematica (Cluj), v.2 (25), fasc.1, p.25-40 (1960). [3] *Р.А.Багиян,* Изв. АН Армении, т.26, №4, с.324-342 (1991). [4] *T.Popoviciu,* Mathematica (Cluj), v.1 (24), fasc.1, p.95-142 (1959).