ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 №2-4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.547

В. И. Гаврилов, академик НАН Армении В. С. Захарян

Некасательный рост и ограниченность нормальных голоморфных функций

(Представлено 12/IV 1995)

В статье исследуется свойство ограниченности нормальных голоморфных функций, определенных в единичном круге на комплексной плоскости, в зависимости от условий их ограниченности на малых подмножествах круга.

1. Предварительные определения и обсуждения. Символами V и Γ обозначим, соответственно, единичный круг $V:|z|<1$ на комплексной z-плоскости $\mathbf{C}:|z|<\infty$ и единичную окружность $\Gamma:|z|=1$. Напомним, что мероморфную функцию $f(z)$, определенную в круге V, называют нормальной функцией, если множество функций $\{(f\circ S)(z)|S\in T\}$, порождаемое функцией $f(z)$ на группе T всех конформных автоморфизмов $S(z)$ круга V, образует в V нормальное семейство в смысле Монтеля ([1]). Хорошо известно, что семейство нормальности функции $f(z)$ полностью характеризуется в терминах ее сферической производной $f^{\#}(z)= =|f'(z)|\left[1+|f(z)|^2\right]^{-1}$, являющейся неотрицательной непрерывной функцией в круге V, поскольку в каждой точке $z\in V$, в которой $f(z)\neq\infty,0$, справедливо свойство $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{\#}(z)=f^{\#}(z)$, которое и служит определением функции $f^{\#}(z)$ в полюсах функции $f(z)$ в круге V. Именно, мероморфная функция $f(z)$ будет нормальной функцией в круге V тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{z\in V}\left(1-|z|^2\right)f^{\#}(z)<+\infty$ (см.([2]) или ([3]), с.152).

Последнее условие имеет простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим одноточечную компактификацию комплексной плоскости $\mathbf{C}$ в виде сферы Римана Ω, на которой определена сферическая метрика с линейным элементом $d\chi(w)=\left(1+|w|^2\right)^{-1}|dw|$. В частности, если $w=f(z)$,

$z \in V$, то $d\chi(f(z)) = f^{\#}(z)|dz|$, $z \in V$. В единичном круге V определена гиперболическая метрика с линейным элементом $d\sigma(z) = \left(1 - |z|^2\right)^{-1}|dz|$, $z \in V$. Поэтому мероморфная в круге V функция $f(z)$ будет нормальной тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $C = C_f > 0$, что $d\chi\left(f(z)\right) \le C d\sigma(z)$, $z \in V$; т.е. тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица относительно сферической метрики на сфере Римана Ω и гиперболической метрики в единичном круге V.

2. Ограниченные функции Блока. Голоморфную функцию $f(z)$, определенную в круге V, называют функцией Блока, если $\sup_{z \in V}\left(1 - |z|\right)|f'(z)| < +\infty$. Любая ограниченная голоморфная функция $f(z)$, определенная в круге V, является функцией Блока, поскольку из свойства $|f(z)| \le K$, $z \in V$, и из представления производной $f'(z)$ интегралом Коши от функции $f(z)$ непосредственно следует оценка $|f'(z)| \le K\left(1 - |z|\right)^{-1}$, $z \in V$. Так как $f^{\#}(z) \le |f'(z)|$, $z \in V$, то каждая функция Блока является нормальной голоморфной функцией. Эллиптическая модулярная функция $g(z) \ne 0, 1, \infty$, $z \in V$, доставляет пример нормальной голоморфной функции, не являющейся функцией Блока (см. также пример 3 в пункте 7 ниже).

В статье ([4]) доказано следующее достаточное условие ограниченности функции Блока.

Теорема А. *Если существует такая постоянная $K > 0$, что для функции Блока $f(z)$ условие $\limsup_{r \to 1-0}|f(r\zeta)| \le K$, $0 < r < 1$, выполняется в каждой граничной точке $\zeta \in \Gamma$, то функция ограничена в круге V.*

Доказываемый ниже в пункте 3 результат распространяет утверждение теоремы А на все нормальные голоморфные функции, ослабляя при этом условие на рост функции.

3. Ограниченные нормальные голоморфные функции. Для произвольной точки $\zeta \in \Gamma$ обозначим через $h(\zeta, \varphi)$ хорду круга $D_\zeta : \left|z - \frac{1}{2}\zeta\right| < \frac{1}{2}$, оканчивающуюся в точке ζ и образующую с диаметром круга D_ζ в точке ζ угол раствора φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда символ $h(\zeta, 0)$, обозначающий диаметр круга D_ζ в точке ζ, будет обозначать также радиус круга V в точке ζ. Угловую подобласть круга D_ζ, расположенную между хордами $h(\zeta, \varphi_1)$ и $h(\zeta, \varphi_2)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, обоз-

начим символом $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$ (или просто $\Delta(\zeta)$, если нас не интересует величина раствора угла $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$).

Последовательность точек (z_n) круга V назовем некасательно сходящейся к граничной точке $\zeta\in\Gamma$, если $\zeta=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ и точки z_n лежат в некотором угле $\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке ζ для всех индексов $n\in\mathbf{N}$, начиная с некоторого индекса $N\in\mathbf{N}$, т.е. $z_n\in\Delta(\zeta)$ для всех $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N$.

Определение 1. *Условимся считать, что мероморфная функция $f(z)$ обладает в граничной точке $\zeta\in\Gamma$ свойством (a), если функция ограничена на некоторой последовательности точек (z_n^ζ), некасательно сходящихся к точке ζ, т.е. оценка $\left|f(z_n^\zeta)\right|\leq K_\zeta$ справедлива для всех индексов $n\in\mathbf{N}$ с некоторой константой $K_\zeta>0$.*

Например, если в точке $\zeta\in\Gamma$ справедливо свойство $\limsup\limits_{r\to 1-0}|f(r\zeta)|<+\infty$, то функция $f(z)$ обладает в точке $\zeta\in\Gamma$ свойством (a) с постоянной $K_\zeta=\limsup\limits_{r\to 1-0}|f(r\zeta)|+\varepsilon$ для любого числа $\varepsilon>0$.

Теорема 1. *Если нормальная голоморфная функция $f(z)$ обладает свойством (a) в каждой точке $\zeta\in\Gamma$, то $f(z)$ ограничена в круге V. Если, дополнительно, существует такая постоянная $K>0$, что константы K_ζ в свойстве (a) удовлетворяют неравенству $K_\zeta\leq K$ для всех точек $\zeta\in\Gamma$, то $|f(z)|\leq K$ всюду в круге V.*

Доказательство. Допустим, напротив, что функция $f(z)$ не ограничена в круге V. Поскольку для голоморфной функции $f(z)$ значение ∞ является исключительным значением и функция $f(z)$ не ограничена в круге V, то, согласно теореме Кирста и Шпильрайна ([5]), значение ∞ является асимптотическим значением для функции $f(z)$, т.е. в круге V существует такая жорданова кривая L, оканчивающаяся на Γ, на которой $\lim\limits_{|z|\to 1,\, z\in L} f(z)=\infty$.

Имеются только две возможности: 1) кривая L имеет единственную предельную точку ζ_0 на окружности Γ, т.е. кривая L оканчивается в единственной точке $\zeta_0\in\Gamma$, и 2) кривая L имеет по крайней мере две различные предельные точки на Γ, т.е. кривая L оканчивается некоторой замкнутой дугой γ на Γ (возможно, $\gamma=\Gamma$).

В случае 2), в силу теоремы единственности из статьи (([6]), теорема 1), мы должны иметь $f(z)\equiv\infty$, $z\in V$, в то время как по условию теоремы $f(z)\not\equiv\infty$, $z\in V$.

В случае 1), согласно известному результату из статьи ([2], теорема 1), функция $f(z)$ обязана иметь угловой предел ∞ в точке $\zeta_0 \in \Gamma$, т.е. для любого угла $\Delta(\zeta_0)$ имеем $\lim\limits_{z\to\zeta_0,\ z\in\Delta(\zeta_0)} f(z)=\infty$. Последнее противоречит свойству (а) функции $f(z)$ в точке $\zeta_0 \in \Gamma$.

Итак, оба случая 1) и 2) невозможны, и значит функция $f(z)$ ограничена в круге V, т.е. доказано первое утверждение теоремы 1.

Согласно классической теореме Фату (см., например, [7], с.66), функция $f(z)$ имеет почти всюду на Г конечные угловые граничные значения, т.е. в каждой точке $\zeta \in \Gamma$, за возможным исключением точек некоторого множества $E \subset \Gamma$ линейной лебеговой меры нуль, $\mathrm{mes}E=0$, существует конечный $\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\Delta(\zeta)} f(z)=f(\zeta)$ по любому углу $\Delta(\zeta)$ и значение $f(\zeta)$ не зависит от раствора угла $\Delta(\zeta)$. Так как функция $f(z)$ обладает в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ свойством (а), то $|f(\zeta)| \le K_\zeta$ в тех точках $\zeta \in \Gamma$, в которых угловой предел $f(\zeta)$ существует. Если функция $f(z)$ удовлетворяет дополнительному условию теоремы 1, то заключаем, что $|f(\zeta)| \le K$ для всех точек $\zeta \in \Gamma$, в которых угловой предел $f(\zeta)$ существует. В силу теоремы Г.М.Фихтенгольца (см. [7], с.97), ограниченная голоморфная функция $f(z)$ представима в круге V интегралом Пуассона−Лебега от своей граничной функции $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$. Прямая оценка этого интеграла при условии, что $|f(\zeta)| \le K$ почти всюду на Г, приводит к заключению, что $|f(z)| \le K$ для всех $z \in V$, т.е. доказано и второе утверждение теоремы 1.

4. Достаточное условие ограниченности функции Блока. В статье [4] доказано достаточное условие ограниченности функции Блока, основанное на введенном в [4] понятии пренебрежимо малого граничного множества. Множество E точек окружности Г называют пренебрежимо малым, если для любой точки $\zeta \in E$ можно указать некоторую дугу l на Г, лежащую в $\Gamma \setminus E$ и оканчивающуюся в точке ζ. Из определения непосредственно следует, что любое пренебрежимо малое множество на Г не более чем счетное, поскольку оно равномощно некоторому множеству открытых взаимно непересекающихся дуг на Г, которое, как известно, не более чем счетное.

Теорема Б [4]. *Если существуют такая постоянная $K>0$ и такое пренебрежимо малое множество E на Г, что функция Блока $f(z)$ обладает свойством $\limsup\limits_{z\to\zeta,\ z\in V} |f(z)| \le K$ в каждой точке $\zeta \in \Gamma \setminus E$, то функция $f(z)$ ограничена в круге V.*

Прежде чем комментировать условие теоремы Б с позиций теории предельных множеств, отметим, что функция, удовлетворяющая условию этой теоремы, обладает в каждой точке $\zeta \in \Gamma \setminus E$ свойством (а) с постоянными $K_\zeta \le K$, $\zeta \in \Gamma \setminus E$. Напомним теперь, что в теории предельных множеств символом $C(f,\zeta,S)$ принято обозначать предельное множество комплекснозначной функции $f(z)$, определенной в круге V, в граничной точке $\zeta \in \Gamma$ по множеству S, принадлежащему кругу V и имеющему точку ζ в качестве своей предельной точки. По определению, множество $C(f,\zeta,S)$ состоит из всех таких точек $w \in \Omega$, которые являются пределом $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n^w) = w$ для некоторой последовательности точек (z_n^w), $z_n^w \in S$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^w = \zeta$. В этих обозначениях свойство $\limsup\limits_{z\to\zeta,\, z\in V} |f(z)| \le K$ равносильно тому, что предельное множество $C(f,\zeta,V)$ функции $f(z)$ в точке $\zeta \in \Gamma \setminus E$ по всему кругу V ограничено и содержится в круге $|w| \le K$.

Согласно теореме Э.Коллингвуда (см. ([8]), с.105), для произвольной комплекснозначной функции $f(z)$, определенной в круге V, и для произвольной точки $\zeta \in \Gamma$ можно указать такую жорданову кривую L_ζ^o, лежащую в V и оканчивающуюся в точке ζ, по которой $C(f,\zeta,L_\zeta^o) = C(f,\zeta,V)$. Для произвольной жордановой кривой L_ζ, лежащей в круге V и оканчивающейся в точке $\zeta \in \Gamma$, совпадение $C(f,\zeta,L_\zeta) = C(f,\zeta,V)$ происходит, как правило, редко. Даже в случае радиусов $h(\zeta,0) = h_\zeta$ круга V в граничных точках $\zeta \in \Gamma$ существуют ограниченные голоморфные в V функции $f(z)$, для которых равенство $C(f,\zeta,h_\zeta) = C(f,\zeta,V)$ справедливо в точках $\zeta \in \Gamma$, образующих множества нулевой линейной лебеговой меры, т.е. $C(f,\zeta,h_\zeta) \ne C(f,\zeta,V)$ для почти всех точек $\zeta \in \Gamma$ (см. пример 4 в пункте 7 ниже). С другой стороны, однако, справедлива следующая теорема Э.Коллингвуда (см. ([8]), с.108): для произвольной мероморфной функции $f(z)$, определенной в круге V, граничные точки $\zeta \in \Gamma$, в которых $C(f,\zeta,h_\zeta) \ne C(f,\zeta,V)$, обязаны образовать множество первой категории (по Бэру) на Γ.

Проведенные выше обсуждения указывают направление дальнейшего ослабления условий теоремы Б посредством введения нового свойства (б).

Определение 2. *Будем считать, что мероморфная функция $f(z)$, определенная в круге V, обладает в граничной точке $\zeta \in \Gamma$ свойством (б), если на некоторой жордановой кривой L_ζ, лежащей в V*

и оканчивающейся в точке ζ, предельное множество $C(f,\zeta,L_\zeta)$ ограничено и содержится в круге $|w|\le K_\zeta$, где $K_\zeta>0$ — некоторая постоянная.

В частности, в силу свойства непрерывности, голоморфная функция $f(z)$, определенная в круге V, обладает свойством (б) в граничной точке $\zeta\in\Gamma$ тогда и только тогда, когда $\limsup\limits_{z\to\zeta,\, z\in L_\zeta}|f(z)|=K_\zeta<+\infty$ на некоторой жордановой кривой L_ζ, лежащей в круге V и оканчивающейся в точке ζ.

Подчеркнем еще раз, что в определении свойства (б) не требуется, чтобы $C(f,\zeta,V)=C(f,\zeta,L_\zeta)$ для выбранной жордановой кривой L_ζ в точке $\zeta\in\Gamma$.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Если существуют такая постоянная $K>0$ и такое пренебрежимо малое множество E на Γ, что функция Блока $f(z)$ обладает свойством (а) в каждой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$ и свойством (б) в почти каждой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$, причем постоянные K_ζ в свойстве (б) удовлетворяют неравенству $K_\zeta\le K$, то функция $f(z)$ ограничена в круге V и $|f(z)|\le K$ всюду в V.*

Следствие. Если существуют такая постоянная $K>0$ и такое пренебрежимо малое множество E на Γ, что функция Блока $f(z)$ обладает свойством $\limsup\limits_{r\to1-0}|f(r\zeta)|\le K$, $0<r<1$, в каждой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$, то функция $f(z)$ ограничена в круге V и $|f(z)|\le K$ всюду в V.

Условия теоремы 2 и следствия к ней значительно слабее не только условий теоремы А, но и условий теоремы Б (см. обсуждение примера 4 в пункте 7 ниже).

В доказательстве теоремы 2 используются свойства предельных множеств мероморфных функций, которые позволяют свести условие теоремы 2 к условию теоремы Б.

5. В основе доказательства теоремы 2 лежит следующая

Лемма 1. Пусть E — произвольное пренебрежимо малое множество на Γ и $K>0$ — постоянная. Если нормальная голоморфная в V функция $f(z)$ обладает в каждой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$ свойством (а) и в почти каждой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$ обладает свойством (б), в котором постоянные K_ζ удовлетворяют неравенству $K_\zeta\le K$, то в каждой точке $\zeta\in\Gamma\setminus E$ функция $f(z)$ обладает свойством $\limsup\limits_{z\to\zeta,\, z\in V}|f(z)|\le K$ (т.е. функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Б).

Доказательство леммы 1. Рассмотрим произвольную точку $\zeta_0\in\Gamma\setminus E$. Тогда существует некоторая открытая дуга $\gamma\subset\Gamma\setminus E$, которая содержит точку ζ_o, и существует некоторое множество E_o на γ нулевой линейной лебеговой меры, $\mathrm{mes}E_o = 0$, что в любой точке $\zeta \in \gamma \setminus E_o$ голоморфная функция $f(z)$ обладает свойством (б), и значит, множество $C(f,\zeta,L_\zeta)$ содержится в круге $|w| \le K_\zeta \le K$ для всех $\zeta \in \gamma \setminus E_o$. Для произвольного числа $\eta > 0$ образуем множество M_η, которое есть замыкание (в Ω) объединения множеств $\bigcup C(f,\zeta,L_\zeta)$ по всем точкам $\zeta \in \gamma \setminus E_o$, $0 < |\zeta - \zeta_o| < \eta$, и положим $C^*_{\Gamma\setminus E_o}(f,\zeta_o) = \bigcap_{\eta>0} M_\eta$. По изложенному выше, множество $C^*_{\Gamma\setminus E_o}(f,\zeta_o)$ ограничено и содержится в круге $|w| \le K$. Согласно теореме К.Носиро (см. ([3]), с.76), множество $C(f,\zeta_o,V) \setminus C^*_{\Gamma\setminus E_o}(f,\zeta_o)$ открытое, т.е. граница множества $C(f,\zeta_o,V)$ содержится в границе множества $C^*_{\Gamma\setminus E_o}(f,\zeta_o)$. Поэтому, если множество $C(f,\zeta_o,V)$ ограничено, то оно содержится в круге $|w| \le K$, и если множество $C(f,\zeta_o,V)$ не ограничено, то значение $\infty \in C(f,\zeta_o,V) \setminus C^*_{\Gamma\setminus E_o}(f,\zeta_o)$. В последнем случае, поскольку значение ∞ не принимается голоморфной функцией $f(z)$ в круге V, согласно другой теореме К.Носиро (см. ([3]), с.80), значение ∞ обязано быть асимптотическим значением функции $f(z)$ либо в точке ζ_o, либо в каждой точке некоторой сходящейся к ζ_o последовательности точек (ζ_k), $\zeta_k \in \gamma$, $k \in \mathrm{N}$, $\lim_{k\to\infty} \zeta_k = \zeta_o$. Так как асимптотическое значение нормальной функции в граничной точке обязано быть угловым граничным значением функции в этой точке и это противоречит свойству (а) функции $f(z)$, то второй случай, когда множество $C(f,\zeta_o,V)$ не ограничено, невозможен.

Итак, мы показали, что условия леммы 1 влекут то свойство, что множество $C(f,\zeta_o,V)$ содержится в круге $|w| \le K$ для любой точки $\zeta_o \in \Gamma \setminus E$, т.е. доказали утверждение леммы 1.

Приступая непосредственно к доказательству теоремы 2, отметим прежде всего, что функция Блока $f(z)$ является нормальной голоморфной функцией, удовлетворяющей условиям леммы 1, а значит, и утверждению леммы 1, которое совпадает с условиями теоремы Б. Поэтому, согласно утверждению теоремы Б, функция Блока $f(z)$ ограничена в круге V. По теореме Фату, функция $f(z)$ имеет почти всюду на Γ конечные угловые граничные значения $f(\zeta)$ и, по условию теоремы 2, $|f(\zeta)| \le K$ для почти всех точек $\zeta \in \Gamma \setminus E$. Поскольку пренебрежимо малое множество $E \subset \Gamma$ не более, чем счетное множество, то $\mathrm{mes}E = 0$

и поэтому окончательное утверждение, что $|f(z)| \le K$ для всех точек $z \in V$, устанавливается таким же способом, что и в доказательстве теоремы 1.

6. Усиление теоремы 2.

Определение 3. *Будем считать, что мероморфная функция $f(z)$, определенная в круге V, обладает в граничной точке $\zeta \in \Gamma$ свойством (в), если $f(z)$ ограничена на некоторой последовательности точек (z_n^ζ) круга V, сходящейся в точке ζ, и для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n^\zeta, z_{n+1}^\zeta) = 0$.*

Понятно, что если функция $f(z)$ обладает в граничной точке $\zeta \in \Gamma$ свойством (б), то она обладает в точке ζ и свойством (в).

Лемма 2. *Для любой нормальной мероморфной функции $f(z)$, определенной в круге V, свойства (б) и (в) равносильны в каждой граничной точке $\zeta \in \Gamma$.*

Доказательство леммы 2 основано на утверждении (см., например, [9]), что для произвольной нормальной мероморфной функции $f(z)$, определенной в круге V, справедливо свойство: если последовательности (z_n) и (z_n') точек круга V связаны условием $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n, z_n') = 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$, то $w = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n')$.

Пусть нормальная мероморфная в V функция $f(z)$ обладает свойством (в) в граничной точке $\zeta \in \Gamma$, т.е. существует такая последовательность точек (z_n^ζ), $z_n^\zeta \in V$, $n \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^\zeta = \zeta$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n^\zeta, z_{n+1}^\zeta) = 0$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} |f(z_n^\zeta)| = K_\zeta < +\infty$. Для произвольного $n \in \mathrm{N}$ соединим попарно точки z_n^ζ и z_{n+1}^ζ геодезической прямой Λ_n относительно гиперболической метрики $d\sigma(z)$ в круге V и образуем кривую $L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, которая, в силу гиперболической геометрии круга V, оканчивается в точке $\zeta \in \Gamma$. Согласно отмеченному выше утверждению, $\limsup\limits_{z\to\zeta, z\in L} |f(z)| = \limsup\limits_{n\to\infty} |f(z_n^\zeta)| = K_\zeta < +\infty$, т.е. функция $f(z)$ обладает в точке $\zeta \in \Gamma$ свойством (б).

Следствие. *Утверждение теоремы 2 остается справедливым, если в ее условиях свойство (б) заменить на свойство (в).*

7. Примеры. Приведенные в этом пункте примеры показывают, во-первых, что свойства голоморфности и нормальности функции в условии теоремы 1 являются неулучшаемыми и, во-вторых, что утверждение теоремы 2 перестает быть справедливым для нормальных голоморфных функций.

Пример 1. Существует нормальная мероморфная функция $F(z)$, не ограниченная в круге V и обладающая свойством (а) в каждой точке $\zeta \in \Gamma$.

Выберем в качестве $F(z)$ нормальную мероморфную в круге V функцию, построенную в статье (9), у которой $F(z_n) = 0$, $n \in \mathbf{N}$, на некоторой последовательности точек (z_n), $z_n \in V$, $n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = 1$, предельные точки которой заполняют всю окружность $\Gamma:|z| = 1$ и которая обладает свойством $\limsup\limits_{n\to\infty}\sigma(z_n, z_{n+1}) = \mu_o, 0 < \mu_o < +\infty$. Для произвольной точки $\zeta \in \Gamma$ рассмотрим угол $\Delta(\zeta, -\varphi, \varphi)$, раствор которого 2φ удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \operatorname{th}(\mu_o + 1)$. Тогда

$$\sigma\big(h(\zeta,-\varphi), h(\zeta,\varphi)\big) = \inf_{z\in h(\zeta,\varphi)}\left[\inf_{z'\in h(\zeta,-\varphi)}\sigma(z', z)\right] > \mu_o$$

и значит, угол $\Delta(\zeta, -\varphi, \varphi)$ обязан содержать некоторую подпоследовательность (z_{n_k}) последовательности (z_n), $(z_{n_k}) \in \Delta(\zeta, -\varphi, \varphi)$, $k \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \zeta$, на которой $\left|F(z_{n_k})\right| = 0$, $k \in \mathbf{N}$, т.е. функция $F(z)$ обладает свойством (а) в каждой точке $\zeta \in \Gamma$.

Пример 2. Для произвольной положительной, строго возрастающей функции $q(r)$, определенной на $0 \le r < 1$ и имеющей $\lim\limits_{r\to 1-0} q(r) = +\infty$, существует голоморфная и не ограниченная в круге V функция $G(z)$, которая обладает свойством (а) в каждой точке $\zeta \in \Gamma$, а также свойствами $\limsup\limits_{|z|\to 1, z\in l'}\left(1 - |z|^2\right)G^{\#}(z) = +\infty$ и $\left(1 - |z|^2\right)G^{\#}(z) \le q(|z|)$ для всех z, $0 < r_o < |z| < 1$.

В качестве функции $G(z)$ рассмотрим бесконечное произведение

$$G(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}}\right)^{n_j},$$

в котором последовательность натуральных чисел (n_j) удовлетворяет условию $\left(\sum\limits_{j=1}^{k-1} n_j\right) < n_k$, $n_1 > 1$, $k \in \mathbf{N}$, $k \ge 2$. Как показано в статье (10), бесконечное произведение абсолютно и равномерно сходится в круге V к голоморфной функции $G(z)$, которая не ограничена в круге V и для которой $\limsup\limits_{|z|\to 1, z\in V}\left(1-|z|^2\right)G^{\#}(z)=+\infty$ и $\left(1-|z|^2\right)G^{\#}(z)\le q(|z|)$ для всех $z\in V$, $r_0<|z|<1$ с некоторым r_0, $0<r_0<1$. Функция $G(z)$ имеет n_j простых нулей z_j^i, $i=1,2,\dots,n_j$, на окружности $|z|=1-\dfrac{1}{n_j}$, $j\in\mathbf{N}$. Поскольку из условия на последовательность (n_j) следует, что $n_k\ge kn_{k-1}$, $k\in\mathbf{N}$, $k\ge 2$, то непосредственный подсчет показывает, что $\limsup\limits_{j\to\infty}\sigma\left(z_j^i,z_j^{i+1}\right)=$ $=\sigma_0<+\infty$ для любого фиксированного индекса i. Поэтому, так же, как и в примере 1, убеждаемся, что для каждой точки $\zeta\in\Gamma$ существует угол $\Delta(\zeta)$, который содержит некоторую последовательность точек (z_m), выбранную из точек z_j^i, $i=1,2,\dots,n_j$, $j\in\mathbf{N}$, для которой $z_m\in\Delta(\zeta)$, $m\in\mathbf{N}$, $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=\zeta$, и $G(z_m)=0$, $m\in\mathbf{N}$, т.е. функция $G(z)$ обладает свойством (а) в каждой точке $\zeta\in\Gamma$.

Примеры 1 и 2 показывают, что утверждение теоремы 1 перестает быть справедливым для нормальных мероморфных функций, а также для голоморфных функций, у которых свойство нормальности нарушается сколь угодно мало.

Пример 3. Существует нормальная голоморфная в круге V функция $g(z)$, обладающая свойствами: 1) функция $g(z)$ не является функцией Блока; 2) $\lim\limits_{r\to 1-0}|g(r\zeta)|=|g(\zeta)|=1$ для всех $\zeta\in\Gamma$, $\zeta\ne 1$; 3) $\lim\limits_{r\to 1-0}|g(r)|=+\infty$.

Рассмотрим функцию $f(z)=\exp\left(-\dfrac{1+z}{1-z}\right)$, $z\in V$, голоморфную и ограниченную в круге V, $|f(z)|\le 1$, $z\in V$. Следовательно, $\limsup\limits_{|z|\to 1, z\in V}\left(1-|z|\right)\cdot$ $|f'(z)|=M<+\infty$. Функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ голоморфна в круге V и не ограничена в нем, так как $\lim\limits_{r\to 1-0}g(r)=\lim\limits_{r\to 1-0}\exp\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)=+\infty$. Поскольку $f'(z)=-\left[g(z)\right]^{-2}\cdot g'(z)$, $z\in V$, то

$$g^{\#}(z)=\frac{|g'(z)|}{1+|g(z)|^2}=\frac{|g(z)|^2}{1+|g(z)|^2}|f'(z)|\le|f'(z)|,\ z\in V,$$

и значит, $\limsup\limits_{|z|\to 1, z\in V}\left(1-|z|\right)g^{\#}(z)\le\limsup\limits_{|z|\to 1, z\in V}\left(1-|z|\right)|f'(z)|=M<+\infty$, т.е. функция $g(z)$ является нормальной голоморфной функцией в круге V. С другой стороны,

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)|g'(r)| = \lim_{r\to 1-0}(1-r)\frac{2}{(1-r)^2}\exp\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = +\infty,$$

т.е. функция $g(z)$ не является функцией Блока.

Наконец, существует $\lim\limits_{r\to 1-0} g(r\zeta) = g(\zeta) = \exp\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$ для любой точки $\zeta\in\Gamma$, $\zeta\neq 1$, и если $\zeta = e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$, то $g(\zeta) = \exp\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \exp\left(i\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)$,

и значит $|g(\zeta)| = \left|\exp\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)\right| = 1$ для всех $\zeta\in\Gamma$, $\zeta\neq 1$, т.е. выполняется свойство 2) в примере 3.

Более того, в каждой точке $\zeta\in\Gamma$, $\zeta\neq 1$, функция $g(z)$ непрерывная, и значит, $C(g,\zeta,V) = \{g(\zeta)\}$, $\zeta\in\Gamma$, $\zeta\neq 1$. Таким образом, $\limsup\limits_{z\to\zeta, z\in V}|g(z)| = 1$ для всех точек $\zeta\in\Gamma$, $\zeta\neq 1$.

Пример 3 показывает, что утверждения теоремы Б, теоремы 2 и следствия к ней несправедливы для произвольных нормальных голоморфных функций даже в случае, когда пренебрежимо малое множество состоит из единственной точки (в примере 3 оно состоит из точки $\zeta = 1\in\Gamma$).

Пример 4. Рассмотрим любую голоморфную в круге V функцию $f(z)$, принадлежащую классу (V) Зейделя, для которой каждая точка окружности Γ является особой точкой. Согласно теореме В.Зейделя (см. ([3]), с.67-68), в каждой точке $\zeta\in\Gamma$ предельное множество $C(f,\zeta,V)$ совпадает с кругом $|w|\leq 1$. С другой стороны, по определению функций класса (V) Зейделя, почти во всех точках $\zeta\in\Gamma$ существуют угловые граничные значения $f(\zeta)$ функции $f(z)$ и $|f(\zeta)| = 1$. Поэтому заключаем, что почти во всех точках $\zeta\in\Gamma$ предельное множество $C(f,\zeta,h_\zeta)$ функции $f(z)$ по радиусу h_ζ круга V в точке ζ состоит из единственного значения $f(\zeta)$ и $|f(\zeta)| = 1$.

Итак, функция $f(z)$ в примере 4 удовлетворяет условиям теоремы 2, в которых пренебрежимо малое множество пустое и $C(f,\zeta,h_\zeta)\neq$ $\neq C(f,\zeta,V)$ почти во всех точках $\zeta\in\Gamma$. В этом смысле условия теоремы 2 значительно слабее условий теоремы Б.

Московский государственный университет им М.В.Ломоносова
Государственный инженерный университет Армении

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ, Հայաստանի ԳԱԱ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Նորմալ հոլոմորֆ ֆունկցիաների ոչ շոշափող աճը և սահմանափակությունը

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է միավոր շրջանում նորմալ հոլոմորֆ ֆունկցիաների սահմանափակ լինելու հատկությունը՝ կախված շրջանում փոքր ենթաբազմությունների վրա նրանց սահմանափակ լինելուց:

Վերջում բերվում են օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս նախորդ թեորեմներում պարունակվող որոշ պայմանների ճշգրտությունը կամ անհրաժեշտությունը:

ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П.Монтель,* Нормальные семейства аналитических функций, М.-Л., ОНТИ, 1936. [2] *O.Lehto, K.I.Virtanen,* Acta Math., v.97, №1-2, p.47-65 (1957). [3] *К.Носиро,* Предельные множества, М., ИЛ, 1963. [4] *A.Bonilla, F.P.Gonsales,* Bull. Austral. Math. Soc., v.42, №1, p.33-39 (1990). [5] *S.Kierst, E.Szpilrajn*, Fund. Math., v.21, p.276-294 (1933). [6] *В.И.Гаврилов,* ДАН СССР, т.138, №1, с.16-17 (1961). [7] *И.И.Привалов,* Граничные свойства аналитических функций, М.-Л., ГИТТЛ,1950. [8] *Э.Коллингвуд, А.Ловатер,* Теория предельных множеств, М., Мир, 1971. [9] *F.Bagemihl, W.Seidel,* Ann. acad. sci. fenn., Ser. A1, Math., v.280, p. 11-14 (280). [10] *V.I.Gavrilov,* Nagoya Math. J., v.35, p.151-157 (1969).