

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6

Р. Е. Саркисян

Критерии согласованности и процедуры коррекции
субъективных моделей

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. А. Терзяном 11/XI 1994)

1. *Введение.* Автоматизация решения прикладных многокритериальных задач предполагает сопряжение двух типов моделей: объективной модели предметной области и субъективной модели (модели предпочтений).

При построении интерактивных поисковых процедур адаптивного типа, основанных на методах производных по направлению [1], в качестве эффективного механизма сопряжения используются маргинальные соотношения, представленные в виде отношений производных критериальных функций по направлению.

Ценность этого подхода заключается в том, что в сочетании с процедурой получения неформальной информации о предпочтениях, предложенной Майер-Ротом и Стенкардом [2] (см. также [3]), он позволяет непосредственно проверить ее непротиворечивость, а в случае наличия противоречивости, разработать конструктивные алгоритмы и процедуры коррекции в режиме диалога.

Работа посвящена разработке критериев согласованности и процедур коррекции, основанных на теории несобственных задач математического программирования [4].

2. *Постановка задачи и необходимые обозначения.* В работе используются обозначения, принятые в [1]. Пусть $f_i: E^n \rightarrow E^1$, $i=1, \dots, m$ — критериальные функции, $f=(f_1, \dots, f_m)^T$, $u: E^m \rightarrow E^1$ — функция полезности, которая, однако, в явном виде не задана, $\mu_{ij}=(\partial u/\partial f_i)/(\partial u/\partial f_j)$ — маргинальные отношения замещения между критериями f_i и f_j , $i, j=1, \dots, m$, $i \neq j$, в произвольной точке f^* , $k=0, 1, \dots$, а функции $f_i(x)$ определены на непустом множестве решений $D_k \subset E^n$. Если через f_{i_k} обозначить опорный критерий (например, наиболее предпочтительный критерий в состоянии f^*), а приращения Δf_{i_k} , Δf_{j_1} и Δf_{j_2} , $0 \leq \Delta f_{j_1} < \Delta f_{j_2}$ выбраны такими, что, по мнению лица, принимающего решения (ЛПР), имеет место соотношение

$$(f_1^k, \dots, f_i^k + \Delta f_{i2}, \dots, f_m^k)^T R(f_1^k, \dots, f_{j_k}^k + \Delta f_{jk}, \dots, f_m^k)^T R \\ (f_j^k, \dots, f_i^k + \Delta f_{i1}, \dots, f_m^k)^T, \quad (1)$$

где R — отношение предпочтения, то для величин μ_{ijk} получаем двустороннюю оценку (интервальное оценивание)

$$A_i = \Delta f_{jk} / \Delta f_{i2} \leq \mu_{ijk} \leq B_i = \Delta f_{jk} / \Delta f_{i1}, \quad (2) \\ i = 1, \dots, m; i \neq j_k.$$

С другой стороны, как доказано в [5], для непрерывно дифференцируемых функций f_i , $i = 1, \dots, m$, величины μ_{ijk} выражаются в виде

$$\mu_{ijk} = S^i{}^T e / S^{j_k}{}^T e, \quad i = 1, \dots, m; i \neq j_k, \quad (3)$$

где $S^i = \nabla_x f_i(x^k)$ — градиент функции $f_i(x)$ в точке x^k , $e = \nabla_x u / \|\nabla_x u\|$ — направление градиента функции полезности.

Множество $E_0 = \{e \in E^n / S^i{}^T e / S^{j_k}{}^T e \in [A_i, B_i], i = 1, \dots, m; i \neq j_k\}$ будем называть конусом предпочтений. Условие $E_0 \neq \emptyset$, очевидно, служит геометрическим критерием согласованности оценок Δf_{jk} , Δf_{i1} и Δf_{i2} , $i = 1, \dots, m$, $i \neq j_k$. Если $E_0 = \emptyset$, необходимо путем диалога с ЛПР уточнить предпочтения относительно величин Δf_{jk} , Δf_{i1} и Δf_{i2} . Условие (3) и процедура интервального оценивания (1) — (2) позволяют свести согласованность и коррекцию к несобственным задачам математического программирования [4].

3. Процедура d -коррекции. Аналитический эквивалент условия: $E_0 \neq \emptyset$ может быть построен, исходя из следующих соображений. Введем в рассмотрение вектор $l(e)$ размерности $2m+1$, первые m координат которого равны $l_i(e) = (A_i S^{j_k} - S^i) {}^T e$, $i = 1, \dots, m$, а последние m координат — $l_{m+i}(e) = (S^i - B_i \cdot S^{j_k}) {}^T e$, $i = 1, \dots, m$. Тогда условие $E_0 \neq \emptyset$ будет эквивалентно условию совместности системы неравенств

$$l_i(e) \leq 0, \quad i = 1, \dots, 2m, \quad (4) \\ e \in E^n, \|e\| = 1$$

Рассмотрим функцию $d: E^{2m} \rightarrow E_1$, определенную на E^{2m} , которая удовлетворяет условию выпуклости и, кроме того, $d(0) = 0$, $d(z) \geq 0$, $z \geq 0$, $z \neq 0$. Сформулируем задачу:

$$d_0 = \inf d[l_1^+(e), \dots, l_{2m}^+(e)], \quad (5) \\ \|e\| = 1$$

где знак $+$ над координатами вектора $l(e)$ означает замену его отрицательных координат нулями. По существу это действие эквивалентно проектированию вектора $l(e)$ на неотрицательный ортант евклидова пространства E^{2m} . Если нижняя грань в (5) достижима, то система (4) будет совместна тогда и только тогда, когда $d_0 = 0$. Заметим, что достижимость нижней грани в случае (5) гарантирована.

так как функции $l_i(e)$, $i=1, \dots, 2m$, линейны (относительно e) множество значений e ограничено, а $d(z)$ является отображением в вещественнозначном пространстве E^{2m} .

Пусть для некоторого $\bar{e}$, $\|\bar{e}\|=1$, имеет место условие $d_0 = d(l_1^+(\bar{e}), \dots, l_{2m}^+(\bar{e})) > 0$. Тогда корректирующая (4) система будет иметь вид

$$\begin{aligned} l_i(e) - l_i(\bar{e}) &\leq 0 \\ i &= 1, \dots, 2m \end{aligned} \quad (6)$$

4. Процедура z -коррекции. Для того чтобы коррекцию непосредственно интерпретировать в терминах Δf_{11} и Δf_{12} , $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$, рассмотрим матрицу Q размерности $(2m \times n)$, первыми m строками которой являются векторы $A_i S^{j_k} - S^i$, $i=1, \dots, m$, а последующими m строками векторы $S^i - B_i S^{j_k}$, $i=1, \dots, m$, и представим систему (4) в эквивалентной форме

$$Qe \leq 0. \quad (7)$$

Пусть, далее, $M = \{e \in E^n, Qe \leq 0, \|e\|=1\}$. Очевидно, что совместность (4) или (7) равносильна выполнению условия $M \neq \emptyset$. Обозначим также $M(H) = \{e \in E^n, Qe + He \leq 0, \|e\|=1\}$, $K(H) = \{H | M(H) \neq \emptyset\}$ и сформулируем оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} \|H^2\| &\rightarrow \inf, \\ H &\in K(H) \end{aligned} \quad (8)$$

где $\|H\|^2$ — квадрат матричной нормы, который вычисляется по формуле $\|H\|^2 = \sum_{i=1}^{2m} \sum_{j=1}^n h_{ij}^2$, h_{ij} — элементы матрицы H , связанные с приращениями ΔA_i и ΔB_i соотношениями $h_{ij} = \Delta A_i \cdot S^{j_k}$, $h_{m+i,j} = -\Delta B_i S^{j_k}$, $i=1, \dots, m$. Тогда, обозначая $z_i = \Delta A_i$, $z_{m+i} = -\Delta B_i$, $i=1, \dots, m$, и $z = (z_1, \dots, z_{2m})^T$ и учитывая (9), для $\|H\|^2$ получаем выражение $\|H\|^2 = \|S^{j_k}\|^2 \left(\sum_{i=1}^m \Delta A_i^2 + \sum_{i=1}^m \Delta B_i^2 \right) = \|S^{j_k}\|^2 \|z\|^2 = \|S^{j_k}\|^2 z^T z$. Задача (8) при этом преобразуется в виде

$$\begin{aligned} z^T z &\rightarrow \inf, \\ Qe + z S^{j_k T} e &\leq 0 \\ e^T e &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Так как целевая функция в (9) выпукла, а область допустимых решений не пуста и ограничена, нижняя грань в ней достижима. Пусть она равна γ_0 . Соответствующее решение обозначим двойкой $(z^*, \bar{e})$. Величина γ_0 равна нулю тогда и только тогда, когда системы (7) совместны. Если же $\gamma_0 > 0$, тогда $Q\bar{e} + z^* S^{j_k T} \bar{e} \leq 0$, $\bar{e}^T \bar{e} = 1$, и координаты z_i^* , $i=1, \dots, 2m$, представляют те наименьшие приращения ΔA_i и ΔB_i , $i=1, \dots, m$, при которых система (7) совместна. Этим изменениям соответствуют совместные оценки $\bar{r}_{ij_k} = S^{i T} \bar{e}_i S^{j_k T} \bar{e}$, $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$.

Знаки z_i^* указывают на характер деформации конусов $E_{0i} = \{e \in E^n / S^{iT} e / S^{i*T} e \in [A_i, B_i], \forall i\}$, и конуса предпочтений $E_0 = \bigcap_{i=1}^m E_{0i} \neq \emptyset$.

Если в результате неформального анализа скорректированные интервалы $[A_i, B_i]$ и им соответствующие оценки μ_{i/j_k} , $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$, оказываются нереалистическими, необходимо вернуться к начальным этапам процедуры и повторить вычисления для уточненных значений оценок Δf_{j_k} , Δf_{j_1} и Δf_{j_2} , $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$.

Соответствующая интерактивная процедура состоит из следующих шагов:

шаг 1) в состоянии j^* выбрать опорный критерий f_{j^*} и установить начальные приближения Δf_{j_k} , Δf_{j_1} , Δf_{j_2} , $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$:

шаг 2) обозначить $(\gamma_0, z^*, \bar{e})$ — решение задачи (9). Если $\gamma_0 = 0$, остановиться, исходная система (7) совместна. В противном случае перейти к шагу 3;

шаг 3) путем неформального анализа исследовать компоненты вектора z^* и соответствующие отношения замещения μ_{i/j_k} , $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$. Если они приемлемы, остановиться, координаты z^* представляют наименьшую коррекцию для величин A_i и B_i , $i=1, \dots, m$, $i \neq j_k$. В противном случае уточнить оценки Δf_{j_k} , Δf_{j_1} и Δf_{j_2} , $i=1, \dots, m$, и перейти к шагу 2.

5. *Альтернативные процедуры коррекции.* Альтернативные интерактивные корректирующие процедуры можно построить, исходя из многопараметрического подхода к аппроксимации канонизированной с помощью искусственных переменных y_i , $i=1, \dots, 2m$, $y_i \geq 0$, системы $Qe + y = 0$. Согласно этому подходу (несовместной) канонизированной системе $Qe + y = 0$ можно поставить в соответствие множества $M(H, y') = \{e \in E^n / (Q + H)e + y + y' = 0\}$, $k = \{(H, y') / M \neq \emptyset\}$ и оптимизационную задачу

$$\|H\|^2 + \|y'\|^2 \rightarrow \inf, \quad (H, y') \in k \quad (10)$$

Следует также заметить, что аппроксимацию задачи (10) можно параметризовать и минимизацию осуществить с помощью единственного параметра $t \geq 0$, удовлетворяющего матричному уравнению $(Q + tH)e + y + ty' = 0$ для любых фиксированных H и y' .

Соответствующая модифицированная задача будет иметь вид

$$t \rightarrow \min, \quad (Q + tH)e + y + ty' = 0, \quad t \geq 0 \quad (11)$$

6. *Заключение.* Эффективность человеко-машинных методов решения прикладных многокритериальных задач зависит от непротиворечивости неформальной информации и ее согласованности с особен-

ностями и ограничениями объективной модели соответствующих предметных областей. Для этой цели разработаны геометрические и аналитические критерии непротиворечивости неформальной информации и интерактивные процедуры ее коррекции в рамках теории несобственных задач математического программирования. Критерии согласованности и процедуры коррекции положены в основу сопряжения неформальных моделей о предпочтениях и объективных моделей исследуемых и оптимизируемых проблем.

Государственный инженерный
университет Армении

Լ. Ն. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Համաձայնեցվածության չափանիշներ և սուբյեկտիվ մոդելների նշուման ընթացակարգեր

Կիրառական բազմաչափանիշային խնդիրների լուծումը, որպես կանոն, ենթադրում է օբյեկտիվ (սրբրլեմային բնագավառի) և սուբյեկտիվ (նախապատվության համակարգի) մոդելների լծորդում, որի համար, որպես արդյունավետ մեխանիզմ, առաջարկվում է օգտագործել մարգինալ (սահմանային) հարաբերակցությունները՝ արտահայտված ըստ ուղղությունների ածանցյալների օգնությամբ:

Այդ հարաբերակցությունների հիմքի վրա մշակված են չափանիշներ և ընթացակարգեր, որոնք թույլ են տալիս ապահովել գնահատականների համաձայնեցվածությունը և մոդելների կոոեկտումը հակասությունների առկայության դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Р. Е. Саркисян. Изв. АН Армении. Технические науки, т. 44, № 5—6, с. 282—287 (1991).
2. C. Maier-Rothe, Jr. M. F. Stankard, 7 th Math Progr. Siniр. The Hague, Sept., p. 165—172, 1970.
3. Б. Руа, в кн. Вопросы анализа и процедуры принятия решений, М., Мир, с. 20—58, 1976.
4. И. И. Еремин, В. Д. Мазуров, Н. Н. Астафьев. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования, М., Наука, 1983.
5. Р. Е. Саркисян. Информатика. Сер. Прикладные проблемы. Вопросы теории и практики, вып. 1, с. 102—110, 1990.