ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 № 1

МЕХАНИКА

УДК 532.516+621.89

Л. Г. Петросян

Уравнения квазистационарного течения смазочного слоя асимметричной жидкости

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Г. Е. Багдасаряном 14/III 1994)

Для несимметричной модели гидродинамической теории смазки исходными являются уравнения неразрывности, поступательного и вращательного движения частицы и притока тепла.

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [1, 2]

$$\nabla\cdot\vec{v}=0,\quad \frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+2\nu\nabla\cdot(\nabla\vec{v})^d+\nu_r\nabla\times[2\vec{\omega}-\nabla\times\vec{v}]+\vec{f},$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=2\nu_r(\nabla\times\vec{v}-2\vec{\omega})+c_0\nabla(\nabla\cdot\vec{\omega})+2c_d\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^d-2c_a\nabla\cdot(\nabla\vec{\omega})^a+\vec{c}. \qquad (1)$$

Здесь ρ—массовая плотность, p—давление, I—скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\vec{v}$—вектор скорости точек, $\vec{\omega}$—вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν—кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r—кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d, c_a—коэффициенты моментной вязкости, $d(\ldots)/dt$—полная производная по времени, ∇—пространственный градиент, $(\Delta\vec{v})^d$ и $(\nabla\vec{\omega})^d$—симметричные части соответствующих диад, $(\nabla\vec{v})^a$ и $(\nabla\vec{\omega})^a$ — антисимметричные диады, $\vec{f}$—вектор массовой силы, $\vec{c}$—вектор массового момента.

Основным уравнением несимметричной гидродинамической теории смазки является модифицированное уравнение Рейнольдса [3], которое можно получить совместным решением системы уравнений движения (1).

Ниже приводится вывод уравнения квазистационарного течения несимметричного смазочного слоя.

Ограничимся анализом плоского течения жидкости. Массовые силы и моменты будем считать пренебрежимо малыми. Тогда вектор скорости, вектор угловых скоростей и давление будут иметь форму

$$\vec{v}=\vec{v}[u(x,y),\ v(x,y),\ 0],$$
$$\vec{\omega}=\vec{\omega}[0,\ 0,\ \omega(x,y)],\quad p=p(x,y) \tag{2}$$

и уравнения неразрывности и движения (1) сведутся к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{du}{dy}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+(\nu+\nu_r)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{2\nu_r}{I}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{4\nu_r}{I}\omega+\gamma\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right), \tag{6}$$

$$\gamma=\frac{c_a+c_d}{I}.$$

Здесь u и v—проекции вектора скорости точки, соответственно, на оси x и y, ω—проекция вектора угловой скорости вращения частицы на оси z.

Представим систему (3)—(6) в безразмерном виде.

Введем безразмерные переменные с учетом того, что порядок координаты и скорости в направлении нормали к поверхности шипа мал по сравнению с порядком координат и скоростей в направлении x

$$x=R_0x^*,\quad y=\delta y^*,$$
$$u=\Omega R_0u^*,\quad v=\Omega R_0v^*, \tag{7}$$
$$\delta=R-R_0,\quad \psi=\frac{\delta}{R_0},\quad t=Tt^*,$$

Здесь R_0—характерный размер опоры (радиус шипа), $\delta=c$—радиальный зазор опорного подшипника, ψ—относительный зазор, Ω—угловая скорость вращения шипа вокруг своей оси, T—период угловой скорости вращения.

Характерные числа Рейнольдса и Струхаля, безразмерные давление и скорость вращения частиц введем следующим образом:

$$R=\frac{\Omega\delta^2}{\nu+\nu_r},\quad S=\frac{1}{\Omega T},\quad p=\frac{R_0^2\Omega(\nu+\nu_r)}{\delta^2}p^*=\frac{\Omega\rho(\nu+\nu_r)}{\psi^2}p^*,$$
$$\omega=\frac{R_0\Omega}{\delta}\omega^*. \tag{8}$$

Подставляя в уравнениях (3)—(6) обозначения переменных из (7) и (8), получим

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0, \tag{9}$$

$$RS\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+R\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\left(\psi^2\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)+2N^2\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}, \tag{10}$$

$$\psi^2 RS\frac{\partial v^*}{\partial t^*}+\psi^2 R\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\psi^2\left(\psi^2\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)-$$

$$-2N^2\psi^2\frac{\partial \omega^*}{\partial x^*}, \tag{11}$$

$$\frac{RS}{E}\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*}+\frac{1}{E}\left(u^*\frac{\partial \omega^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}\right)=2N^2\left(\psi^2\frac{\partial v^*}{\partial x^*}-\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)-4N^2\omega^*+$$

$$+\frac{R}{R_c}\left(\psi^2\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}}\right). \tag{12}$$

Здесь

$$R_c=\frac{\Omega\delta^4}{\gamma I}=\frac{\Omega\delta^4}{c_a+c_d},\quad E=\frac{\delta^2}{I},\quad N=\left(\frac{\nu_r}{\nu+\nu_r}\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Ввиду малости $\psi^2 \ll 1$*, безразмерные уравнения неразрывности (9), поступательных и вращательного движений (10)—(12) приобретут вид

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0,$$

$$RS\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+R\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+2N^2\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*},$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*}=0,$$

$$\frac{RS}{E}\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*}+\frac{1}{E}\left(u^*\frac{\partial \omega^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*}\right)=-2N^2\left(2\omega^*+\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\frac{R}{R_c}\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}}. \tag{14}$$

Оценим безразмерные параметры системы (14). Для этого в качестве примера рассмотрим один из самых крупных быстровращающихся подшипников—опорный подшипник турбогенератора мощностью 500 тыс. кВт, изготовленного заводом «Электротяжмаш». Диаметр шейки вала 500 мм, радиальный зазор 0,8 мм, угловая скорость $\Omega=314\,\frac{1}{c}$, относительный зазор $\psi=0{,}0032$, число Рейнольдса ~ 0.1. Даже для таких опор скольжения можно пренебречь членами системы (14), содержащими R.

---

* Для современных двигателей внутреннего сгорания (ДВС) при ходовой посадке 2-го класса точности $\psi\approx 0{,}001$ [4].

Относительно локальных членов инерции в уравнениях движения для большого числа подшипников прокатных машин, подшипников холодильных машин, двигателей внутреннего сгорания и т. д. произведение чисел Рейнольдса и Струхаля представляет величину порядка 10^{-3}—10^{-5} [5]. При рассмотрении течения смазки таких опор можно пренебречь локальными членами инерции в системе (14). Таким образом, движение смазки в этих опорах является *квазистационирным.* Нестационарность процесса смазки выражается через граничные условия или силовые воздействия, зависящие от времени.

В зависимости от соотношений между комплексами R, R_c, E возможны различные типы уравнений для смазочного слоя.

Анализ порядков величин в уравнениях (14) показывает: если R и R_c имеют одинаковые порядки при условии, что $E \gg R$, то дифференциальные уравнения (14) при сохранении слагаемых, имеющих наибольший порядок величины, в размерных переменных принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial \omega}{\partial y}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{17}$$

$$(c_a^2+c_d)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}-2\nu r\left(2\omega+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0. \tag{18}$$

Полученные уравнения соответствуют случаю, когда инерциями поступательного и вращательного движений частиц можно пренебречь.

Уравнения (15)—(18) являются дифференциальными уравнениями несимметричного смазочного слоя. Эти уравнения смазочного слоя содержат члены, характеризующие несимметричность диады силовых и моментных напряжений.

Во всех случаях, когда вкладыш подшипника имеет фиксированное положение, граничные условия для составляющих скорости и угловой скорости вращения частиц имеют вид [3]

$$\begin{aligned} &u=V, \quad v=0, \quad \omega=0 \quad \text{при } y=0, \\ &u=0, \quad v=0, \quad \omega=0 \quad \text{при } y=h. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь h—местная (переменная) толщина зазора между подшипником и шипом, U—линейная скорость на поверхности шипа.

Выражения для скорости u и угловой скорости вращения частиц ω получим из решения уравнений (16) и (18) при граничных условиях (19)

$$u=\frac{1}{\eta_r R_0}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{N^2h}{k}\frac{ch\,ky-1}{sh\,kh}\right)+U+C\left\{y-\right.$$

$$\left.-\frac{N^2}{k}\left[sh\,ky-\frac{(ch\,ky-1)(ch\,kh-1)}{sh\,kh}\right]\right\}, \tag{20}$$

$$w=\frac{1}{2\eta_r R_0}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\left(\frac{sh\,ky}{sh\,kh}h-y\right)-\frac{1}{2}C\left(ch\,ky-\frac{ch\,kh-1}{sh\,kh}sh\,ky-1\right).$$

Здесь φ—центральный угол, отсчитываемый в направлении вращения шипа,

$$k=\frac{N}{l},\quad l=\left(\frac{c_a+c_d}{4\nu}\right)^{1/2},\quad \eta=\rho\nu,\quad \eta_r=\rho\nu_r,\quad x=R_0\varphi,$$

а постоянная интегрирования C дается соотношением

$$C=\frac{1}{2}\left[\frac{h}{\eta_r R}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+U/\left\{\frac{h}{2}-\frac{N^2}{k}\frac{ch\,kh-1}{sh\,kh}\right\}\right].$$

Для определения давления p обратимся к уравнению неразрывности (15). Беря от обеих частей этого уравнения интеграл по y по толщине смазочной пленки с учетом (19) и подставляя значение u из (20) и интегрируя, получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}f(N,l,h)\right]=\frac{1}{2}UR_0\frac{\partial h}{\partial \varphi},$$

где

$$f(N,l,h)=\frac{1}{12}+\frac{l^2}{h^2}-\frac{Nl}{2h}\,\mathrm{cth}\,\frac{kh}{2}. \tag{21}$$

Уравнение (20)—обычное уравнение Рейнольдса для давлений в модифицированной форме в случае несимметричной структурной жидкости.

Характерным отличием гидродинамической теории смазки структурных несимметричных жидкостей является присутствие масштабных параметров. Модели структурных материальных континуумов более полно отражают внутреннее строение реальных сред, чем модели классической механики сплошных сред.

Ереванский государственный университет

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ասիմետրիկ հեղուկների յուղման շերտի քվազիստացիոնար հոսքի հավասարումը

Բերված է լարումների ոչ սիմետրիկ տենզորով կառուցվածքային հեղուկի քվազիստացիոնար հոսքի հավասարումների արտածումը։ Ստացված է ոչ սիմետրիկ կառուցվածքային հեղուկի դեպքում Ռեյնոլդսի մոդիֆիկացված հավասարումը ճնշման համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Л. Г. Петросян.** Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений, Ереван, Изд-во ЕГУ, 1984.
2. **Нгуен Ван Дьеп, А. Т. Листров.** ПММ, т. 32, вып. 4, с. 748—753 (1968).
3. **Л. Г. Петросян,** Изв. АН АрмССР. Механика, т. 42, № 3, с. 54—64 (1989).
4. Двигатели внутреннего сгорания. Конструкция и расчет поршневых и комбинированных двигателей, т. 3. Под редакцией А. С. Орлина, Машиностроение, М., 1972
5. **И. Я. Токарь.** Проектирование и расчет опор трения, Машиностроение, М., 1971.