ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

С. Х. Дарбинян

О некоторых свойствах путей в направленных графах

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукуряном 25/VIII 1994)

Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге [1]. Следуя [2], скажем, что орграф G удовлетворяет свойству (T), если для любых вершин x, y и z существует путь из вершины x к вершине y, проходящий через вершину z.

В работе [2] доказано, что любой p-вершинный орграф, с минимальными полустепенями не меньшими, чем $p/2$, удовлетворяет свойству (T) (кроме некоторых «простых» орграфов). В настоящей работе доказывается, что любой p-вершинный $(p\geqslant 8)$ направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими, чем $(p-3)/2$, удовлетворяет свойству (T).

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим, соответственно, множество вершин и множество дуг орграфа G. Пусть G—орграф и $A, B\subseteq V(G)$ и $x\in V(G)$. Введем обозначения:

$$E(A\to B)=\{yz\in E(G)/y\in A,\ z\in B\},$$

$$E(A,\ B)=E(A\to B)\cup E(B\to A),$$

$$\mathrm{od}^*(x)=|V(G)|-\mathrm{od}(x)-1,\quad \mathrm{id}^*(x)=|V(G)|-\mathrm{id}(x)-1.$$

Запись $A\to B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E(G)$. Если $H\subseteq V(G)$ и $A\to B$, $B\to H$, то напишем $A\to B\to H$. Если же $A=\{x\}$, то вместо $\{x\}$ будем писать x. Орграф G называется m-связным, если для любых различных вершин x и y существуют не менее m путей из x в y, попарно не имеющих отличных от вершины x и y других общих вершин. Если x, y, $z\in V(G)$, то запись $x\overset{z}{\to}y$ означает путь из x в y, проходящий через вершину z.

Очевидно, имеет место следующая

Лемма 1. Пусть G есть p-вершинный $(p\geqslant 1)$ направленный граф. Тогда G содержит вершины x и y (соответственно u и v) с $\mathrm{od}(x)\leqslant(p-1)/2$ и $\mathrm{od}^*(y)\geqslant(p-1)/2$ (соответственно $\mathrm{id}(u)\leqslant(p-1)/2$ и $\mathrm{id}^*(v)\geqslant(p-1)/2$).

С помощью леммы 1 нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2. Пусть G есть p-вершинный ($p\geqslant 2$) направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими, чем k. Тогда G является $m\geqslant(4k-p+2)/3$ связным.

Теорема. Пусть G есть p-вершинный ($p\geqslant 8$) направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими, чем $(p-3)/2$. Тогда G удовлетворяет свойству (T).

Доказательство. Здесь будем доказывать теорему для $p\geqslant 10$.

Предположим, что утверждение теоремы не верно, т. е. существуют такие вершины x, y, и z, что любой путь из x в y не проходит через вершину z. Из леммы 2 и из $p\geqslant 10$ вытекает, что G является 3-связным. Легко заметить, что вершины x, y и z различные и в G любая вершина несмежна не более, чем 2 вершинам.

Обозначим через

$$C=O(x)\cap I(y),\ A=O(x)-(C\cup\{y\}),$$

$$B=I(y)-(C\cup\{x\}),\ F=O(z)-\{x\},\ H=I(z)-\{y\}.$$

Имеем, что

$$E(x\to B)=E(A\to y)=\varnothing. \tag{1}$$

Из 3-связности G следует, что $z\notin A\cup B\cup C$ и

$$E(A\to z)=E(z\to B)=E(z,\ C)=\varnothing. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $|C|\leqslant 2$ и $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$. Из (2) имеем, что

$$F\cap(C\cup B\cup\{x,y\})=H\cap(A\cup C\cup\{x,y\})=\varnothing. \tag{3}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$E(A\to H)=E(F\to B)=\varnothing. \tag{4}$$

Действительно, так как $|H|$, $|F|\geqslant n-2$, где $p=2n+i$ и $i=0$ или $i=1$, то из (4), из $E(A\to\{x,y,z\})=E(\{x,y,z\}\to B)=\varnothing$ и из леммы 1 следует, что $|A|=|B|=1$ и $a\to C\to b$, где $a\in A$, $b\in B$. Значит, $|C|\geqslant 2$. Поэтому из $E(z,\ C)=\varnothing$ имеем $|C|=2$. Отсюда и из (2) получаем, что $a\in F$ и $b\in H$, т.е. za, $bz\in E(G)$. Следовательно $x\overset{z}{\to}y=xc_1bzac_2y$, где $c_1,c_2\in C$, а это противоречит нашему предположению.

Теперь покажем справедливость (4).

Доказательство (4). Предположим, что $E(A\to H)\neq\varnothing$. Пусть для определенности $ah\in E(G)$, где $a\in A$ и $h\in H$. Из (3) следует, что $az\notin E(G)$, т.е. $a\notin H$.

Случай 1. $h\in B\cup C$, т.е. $hy\in E(G)$.

Если $E(F-\{a\}\to h)=\varnothing$, то легко заметить, что

$$E(F-\{a\}\to B\cup C\cup\{y,z,h\})=\varnothing.$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает, что $n\leqslant 4$, а это противоречит условию $n\geqslant 5$. Следовательно, $E(F-\{a\}\to h)\neq\varnothing$. Пусть для определенности $f_1h\in E(G)$, где $f_1\in F-\{a\}$.

Предположим, что существует такая вершина $b\in B$, что $ab\in E(G)$.

Тогда из

$$E(F-\{a\}\cup\{x,y,z,a\}\to b)=\varnothing$$

вытекает существование такой вершины $u\in\{x,y,z,a,b,h\}\cup F$, что $ub\in E(G)$ и

$$|B\cup C\cup\{u\}|\geqslant n-1. \tag{5}$$

Имеем, что

$$E(F-\{a\}\to B\cup C\cup\{y,z,u\})=\varnothing.$$

Отсюда и из (5) с помощью леммы 1 получим, что $n\leqslant 4$, а это невозможно.

Теперь предположим, что $a\to B$. Если $za\notin E(G)$, то из (3) имеем $E(z,a)=\varnothing$ и $|C|\leqslant 1$. Из $E(F\cup\{x,y,z\}\to B)=\varnothing$ и из $|F\cup\{x,y,z\}|\leqslant n+1$ вытекает, что $|B|\leqslant 1$. Значит $|B\cup C|\leqslant 2$, а это противоречит условию $n\geqslant 5$. Следовательно, можем предполагать, что $za\in E(G)$. Тогда $xf_1\notin E(G)$ и $f_1\in A\cup C-\{a\}$.
Нетрудно убедиться, что

$$E(A\cup C-\{a\}\to H\cup\{f_1\})=\varnothing.$$

Отсюда и из

$$E(A\cup C-\{a\}\to\{x,z\})=\varnothing,$$

$$|A\cup C-\{a\}|\geqslant n-3,\ |H\cup\{x,z,f_1\}|\geqslant n+1$$

следует, что $|A\cup C-\{a\}|\leqslant 1$, т.е. $n\leqslant 4$, а это противоречит условию $n\geqslant 5$.

Случай 2. $h\in B\cup C$, т.е. $hy\in E(G)$.

Тогда из (2) имеем, что $h\in B$. Очевидно, что

$$E(F-\{a\}\to C\cup B-\{h\})=\varnothing. \tag{6}$$

Подслучай 2.1. $za\in E(G)$.

Тогда легко заметить, что $C\neq\varnothing$ и $F=F-\{a\}$. Отсюда вытекает существование такой вершины $h_1\in H-\{h\}$, что

$$|B\cup C\cup\{h_1\}|\geqslant n-1.$$

Предположим, что $E(F\to h_1)\neq\varnothing$. Пусть для определенности $f_1h_1\in E(G)$, где $f_1\in F$. Очевидно, что $h_1y\notin E(G)$. Значит $h_1\in B\cup C$. Легко убедиться, что

$$E(h_1\to B\cup C-\{h\})=\varnothing.$$

Отсюда и из (6) имеем

$$E(\{y,z,h_1\}\cup F\to B\cup C-\{h\})=\varnothing.$$

Поэтому, так как $|F|\geqslant n-2$, то $|B\cup C-\{h\}|\leqslant 1$, т.е. $n\leqslant 4$, что является противоречием.

Теперь предположим, что $E(F\to h_1)=\varnothing$. Имеем, что

$$E(F\to\{y,z,h_1\}\cup B\cup C-\{h\})=\varnothing.$$

Так как $|F|\geqslant n-2$ и

$$|\{y,z,h_1\}\cup B\cup C-\{h\}|\geqslant n,$$

то для некоторой вершины $f_1\in F$ имеет место $f_1h\in E(G)$. Поэтому

$$E(A\cup C\to h_1)=\varnothing.$$

В результате получили

$$E(F\cup\{x,z,a,c\}\to h_1)=\varnothing,$$

где $c\in C$, а это, так как $|\{x,z,a,c\}\cup F|\geqslant n+2$, является противоречием.

Подслучай 2.2. $za\in E(G)$.

Нетрудно убедиться, что $C\neq\varnothing$.

2.2.1. $E(F-\{a\}\to H-\{h\})\neq\varnothing$.

Пусть для определенности $f_1h_1\in E(G)$, где $f_1\in F-\{a\}$ и $h_1\in H-\{h\}$. Тогда очевидно, что $h_1y\notin E(G)$, т.е. $h_1\in B\cup C$. Легко заметить, что $E(C,h_1)=\varnothing$. Отсюда и из $E(C,z)=\varnothing$ вытекает, что $cf_1\in E(G)$ или $f_1c\in EC(G)$. В результате получаем, что $x\overset{z}{\to}y=xcf_1h_1zahy$ или $x\overset{z}{\to}y=xahzf_1cy$, а это противоречит нашему предположению.

2.2.2. $E(F-\{a\}\to H-\{h\})=\varnothing$.

Предположим, что $E(a\to H-\{h\})\neq\varnothing$. Пусть $ah_1\in E(G)$, где $h_1\in H-\{h\}$. Тогда, учитывая рассмотренный случай $h\in B$, можем предположить, что $h_1y\notin E(G)$. Нетрудно убедиться, что $E(C\to\{h,h_1\})=\varnothing$. Следовательно,

$$E(F-\{a\}\cup\{x,y,z\}\cup C\to\{h,\ h_1\})=\varnothing,$$

что является противоречием, так как

$$|F-\{a\}\cup\{x,y,z\}\cup C|\geqslant n+1.$$

Теперь предположим, что $E(a\to H-\{h\})=\varnothing$. Тогда

$$E(F-\{a\}\cup\{x,z,a\}\cup C\to h_1)=\varnothing,$$

и hh_1, $vh_1\in E(G)$, где $v\in\{x,y,z,a\}\cup F\cup C$, $h_1\in H-\{h\}$.

Нетрудно убедиться, что

$$E(C\to\{h_1,v\})=E(F-\{a\}\to v)=\varnothing.$$

Отсюда и из

$$E(\{x,z,h_1\}\cup C\to v)=\varnothing$$

вытекает, что $\{y,a,h\}\to v$. Если $f_1h\in E(G)$, где $f_1\in F-\{a\}$, то $x\overset{z}{\to}y=xavh_1zf_1hy$, что невозможно. Поэтому $E(F-\{a\}\to h)=\varnothing$ и

$$E(F-\{a\}\cup\{x,y,z,v,h_1\}\to h)=\varnothing,$$

а это является противоречием. Таким образом доказали, что $E(A\to H)=\varnothing$.

Если рассмотрим орграф $\bar{G}$, то аналогично $E(A\to H)=\varnothing$ получим $E(F\to B)=\varnothing$.

Итак, доказано соотношение (4), тем самым завершено доказательство теоремы.

Замечание. Пусть G есть 7-вершинный направленный граф с множеством вершин $V(G)=\{x_1,x_2,\ldots,x_7\}$ и с множеством дуг $E(G)=$

$=\{x_1x_2, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_8, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_7, x_5x_2, x_5x_1, x_6x_1, x_8x_2, x_7x_2,$ $x_7x_8\}$. Очевидно, что в G минимальные полустепени$\geqslant 2$ и G не содержит $x_1 \xrightarrow{x_2} x_3$ путь.

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН Армении

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Ուղղորդված գրաֆների ճանապարհների որոշ հատկությունների մասին

Ներկա աշխատանքում ապացուցված է հետևյալ պնդումը՝

Թեորեմ. Դիցուք G-ն կամայական p-գագաթանի, $p\geqslant 8$, գրաֆ է, որի լոկալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $(p-3)/2$ թվից: Այդ ցանկացած x, y և z գագաթների համար գոյություն ունի x-ից դուրս եկող և y-ը մտնող կողմնորոշված պարզ ճանապարհ, որը անցնում է z գագաթով:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ф. Харари. Теория графов, М., Мир, 1973.
2. M. C. Heydemann, D. Sotteau, J of Combinatorial Theory, S. B 38. p. 261—278 (1985).