ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

А. Р. Казарян, И. Г. Хачатрян

О структуре матрицы рассеяния дифференциального оператора произвольного порядка с суммируемыми на всей оси коэффициентами

(Представлено академиком НАН Армении А. Б. Нерсесяном IV 1994)

Пусть $m\geqslant 3$ — натуральное число, m_0 и m_1 — целые части чисел $\frac{m}{2}$ и $\frac{m-1}{2}$ соответственно, а $p_k(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$, $k=0,1,\ldots,m-2$, — суммируемые на всей вещественной оси комплекснозначные функции. Квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu=0,1,\ldots,m$, функции $y(x)$, соответствующие коэффициентам $p_k(x)$, определим по формулам $y^{[0]}=y^{(0)}=y$ и

$$y^{[\nu]}=\frac{1}{i^\nu}y^{(\nu)}=\frac{1}{i^\nu}\frac{d^\nu y}{dx^\nu},\quad \nu=1,2,\ldots,m_0,$$

$$y^{[m_0+1]}=p_{2m_1-1}y^{[m_1-1]}+p_{2m_1}y^{[m_1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}y^{[m_0]},$$

$$y^{[m-\nu]}=p_{2\nu-1}y^{[\nu-1]}+p_{2\nu}y^{[\nu]}+p_{2\nu+1}y^{[\nu+1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}y^{[m-1-\nu]},$$

$$\nu=1,2,\ldots,m_1-1,$$

$$y^{[m]}=p_0y^{[0]}+p_1y^{[1]}+\frac{1}{i}\frac{d}{dx}y^{[m-1]},$$

где i — мнимая единица и $p_{m-1}(x)\equiv 0$. Будем считать, что для данной функции $y(x)$ квазипроизводная $y^{[m]}(x)$ существует, если все квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu=0,1,\ldots,m-1$, существуют и абсолютно непрерывны. Отметим, что если каждый коэффициент $p_k(x)$, $1\leqslant k\leqslant m-2$ имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ включительно, то квазипроизводная $y^{[m]}(x)$ может быть записана в виде

$$y^{[m]}=\sum_{k=0}^{m_1-1}\frac{1}{i^{2k+1}}\{[p_{2k+1}y^{(k)}]^{(k+1)}+[p_{2k+1}y^{(k+1)}]^{(k)}\}+$$

$$\sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{1}{i^{2k}} [p_{2k} y^{(k)}]^{(k)} = \frac{1}{i^m} y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{i^k} q_k y^{(k)},$$

где каждая функция $q_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$, является линейной комбинацией функций $p_s^{(s-k)}(x)$, $k \leqslant s \leqslant \min\{2k+1, m-2\}$. В дальнейшем гладкость коэффициентов $p_k(x)$ не предполагается.

Действующий в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ линейный дифференциальный оператор L порядка m с коэффициентами $p_k(x)$, $k=0,1,\ldots, m-2$, определим следующим образом. Обозначим через D множество всех тех функций $y \in L^2(-\infty,\infty)$, для каждой из которых квазипроизводная $y^{[m]}$, соответствующая коэффициентам $p_k(x)$, существует и $y^{[m]} \in L^2(-\infty,\infty)$. Ясно, что множество D является линейным многообразием пространства $L^2(-\infty,\infty)$. Для функций $y \in D$ положим $Ly = y^{[m]}$.

Обратная задача рассеяния для оператора L в различных постановках рассматривалась в [1—5]. Работы [1—3] посвящены случаю оператора порядка $m=3$, а [4,5] — общему случаю. Вопрос состоит в том, чтобы ввести величины, называемые данными рассеяния оператора L и имеющие некоторую аналогию с известными данными рассеяния оператора Штурма—Лиувилля [6, 7], а затем исследовать разрешимость обратной задачи рассеяния для оператора L, т.е. задачи восстановления коэффициентов $p_k(x)$ оператора L по его данным рассеяния. П. Дейфт, К. Томей и Е. Трубовиц [2] некоторым образом ввели данные рассеяния оператора L порядка $m=3$ и при определенных ограничениях на эти данные доказали единственность решения обратной задачи рассеяния, а при более жестких ограничениях указали некоторый способ восстановления коэффициентов оператора L по данным рассеяния и, кроме того, полученные результаты применили к интегрированию нелинейного уравнения Буссинеска. П. Кодри [2] для оператора L порядка $m=3$ ввел те же данные рассеяния, что и в работе [3], но исходя из несколько иных соображений, позволивших Р. Билсу [4] аналогично ввести данные рассеяния для оператора L произвольного порядка $m \geqslant 3$ и при некоторых ограничениях на них доказать единственность решения обратной задачи. Впрочем, совпадение введенных в [2] и [3] данных рассеяния следует из результатов настоящей статьи. В работе [5] для самосопряженного оператора L произвольного порядка $m \geqslant 3$ при некотором дополнительном условии на L указана другая постановка обратной задачи рассеяния. Рассмотренные в [5] данные рассеяния, в отличие от рассмотренных в [1—4], являются спектральными характеристиками оператора L и, кроме того, примененный подход позволяет поставить обратную задачу рассеяния также для действующего в пространстве $L^2(0, \infty)$ самосопряженного дифференциального оператора [8, 9]. Поставленные в [5, 8, 9] обратные задачи решаются сведением вопроса к решению линейного интегрального уравнения относительно ядра оператора преобразования, являющегося аналогом хорошо известных линейных интегральных уравнений, указанных И. М. Гельфандом, Б. М. Левитаном и В. А. Марченко в случае операторов Штурма—Лиувилля.

Авторами настоящей статьи исследованы спектр и резольвента оператора L (вообще говоря, несамосопряженного), а также структура введенной в [4] матрицы рассеяния оператора L, найдена связь между этой матрицей и введенными в [5] данными рассеяния. Из-за ограниченности объема статьи здесь приводятся лишь результаты исследования структуры указанной матрицы рассеяния. Эти результаты, в частности, показывают, что в обратной задаче рассеяния, рассмотренной в [4], есть согласование между числами задаваемых и определяемых функций.

В работе [4] матрица рассеяния оператора L вводится следующим образом. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(m)}(x)=\lambda^m y(x), \quad -\infty<x<+\infty, \tag{1}$$

где λ—комплексный параметр. С помощью лучей

$$l_\nu=\left\{\lambda, \ \arg(i\lambda)=\frac{\pi\nu}{m}\right\}, \quad \nu=0,1,\dots, 2m-1, \tag{2}$$

разобьем всю комплексную λ-плоскость на $2m$ открытых спектров

$$\Omega_\nu=\left\{\lambda, \ \frac{\pi\nu}{m}<\arg(i\lambda)<\frac{\pi(\nu+1)}{m}\right\}, \quad \nu=0,1,\dots, 2m-1.$$

Обозначим

$$l=\bigcup_{\nu=0}^{2m-1} l_\nu, \quad \Omega=\bigcup_{\nu=0}^{2m-1} \Omega_\nu,$$

$$\omega_k=\exp\left[\frac{2\pi ki}{m}\right], \quad k=0,1,\dots, m-1.$$

Для каждого значения $\lambda\in\Omega\setminus M'$, где M'—некоторое конечное или счетное ограниченное множество, не имеющее предельных точек в Ω, уравнение (1) имеет единственную фундаментальную систему решений $u_k(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots, m-1$, таких, что функции $\exp(-i\omega_k\lambda x)u_k(x,\lambda)$ при $x\to+\infty$ стремятся к 1, а при $x\to-\infty$ имеют конечные пределы. Решения $u_k(x,\lambda)$ при фиксированном x как функция от λ голоморфны в открытом множестве $\Omega\setminus M'$, причем каждая точка из M' является полюсом для некоторой функции $u_k(x,\lambda)$. Для каждой функции $u_k(x,\lambda)$, рассмотренной в секторе Ω_ν, существуют граничные функции $u_k^-(x,\lambda)$, $\lambda\in l_\nu\setminus M$, и $u_k^-(x,\lambda)$, $\lambda\in l_{\nu+1}\setminus M$, (считается $l_{2m}=l_0$), где $M\subset l$—некоторое ограниченное и замкнутое множество, содержащее нуль и все предельные точки множества M', не зависящее от x и имеющее нулевую линейную меру Лебега. При этом множества M и M' инвариантны относительно умножения на числа ω_k, $k=1,2,\dots, m-1$.

Граничные значения $u_k^\pm(x,\lambda)$, $k=0,1,\dots, m-1$, при фиксированном $\lambda \in l_\nu \setminus M$ как функции от x образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Аналогично, $u_k^-(x, \lambda)$, $k=0,1,\ldots, m-1$, при фиксированном $\lambda \in l_{\nu+1} \setminus M$ как функции от x также образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Поскольку каждый луч l_ν является общей границей двух соседних секторов Ω_ν и $\Omega_{\nu-1}$ (считается $\Omega_{-1}=\Omega_{2m-1}$), то для каждого $\lambda \in l_\nu \setminus M$ получаем две фундаментальные системы решений $u_k^+(x, \lambda)$ и $u_k^-(x, \lambda)$, $k=0,1,\ldots, m-1$, уравнения (1). Поэтому существует невырожденная матрица $S(\lambda)=$ $=[S_{kj}(\lambda)]_{k,j=0}^{m-1}$, преобразующая систему решений $u_k^+(x,\lambda)$ в систему решений $u_k^-(x,\lambda)$. Полученная матричная функция $S(\lambda)$, $\lambda \in l \setminus M$, непрерывна в своей области определения и называется матрицей рассеяния оператора L.

Сформулируем теорему, описывающую структуру матрицы рассеяния.

Теорема 1. *Для матрицы рассеяния $S(\lambda)=[S_{kj}(\lambda)]_{k,j=0}^{m-1}$, $\lambda \in l \setminus M$, дифференциального оператора L порядка $m \geq 3$ справедливы следующие утверждения:*

1) *Для любого $\lambda \in l \setminus M$ и любого целого числа $r(0 \leqslant r \leqslant m-1)$ выполняются равенства*

$$S_{kj}(\lambda\omega_r)=S_{k'j'}(\lambda), \; k, j=0,1,\ldots, m-1, \tag{3}$$

где k' и j' определяются из равенств $\omega_{k'}=\omega_k\omega_r$ и $\omega_{j'}=\omega_j\omega_r$. Следовательно, матричная функция $S(\lambda)$ вполне определяется заданием ее значений лишь на произвольных двух лучах (2) номеров различной четности (в частности, на двух соседних лучах или, в случае нечетного m, на двух лучах, симметрично расположенных относительно вещественной оси).

2) *Для каждого $\lambda \in l \setminus M$ выполняются равенства*

$$S_{kj}(\lambda)=0, \; k \neq j, \; \lambda\omega_k+\overline{\lambda\omega_j} \neq 0,$$

$$S_{kk}(\lambda)=1, \; Re(\lambda\omega_k) \leqslant 0,$$

$$S_{kk}(\lambda)=1+S_{kj}(\lambda)S_{jk}(\lambda), \; Re(\lambda\omega_k)>0, \; \lambda\omega_k+\overline{\lambda\omega_j}=0.$$

Следовательно, для каждого $\lambda \in l \setminus M$ матрица $S(\lambda)$ вполне определяется заданием ее элементов $S_{kj}(\lambda)$ лишь для тех k и j, что $k \neq j$ и $\lambda\omega_k+$ $+\overline{\lambda\omega_j}=0$. Число этих элементов при нечетном m равно $m-1$, а при четном m на одном из произвольных двух соседних лучей (2) равно m, а на другом равно $m-2$.

Из сформулированной теоремы следует, что задание матричной функции $S(\lambda)$ равносильно заданию $2m-2$ комплексных функций на полупрямой или заданию $m-1$ комплексных функций на прямой, и, значит, в обратной задаче рассеяния есть согласование между числами задаваемых и определяемых функций. Коэффициенты $p_k(x)$, $k=0$, $1, \ldots, m-2$, самосопряженного дифференциального оператора L вещественны. Приведем соотношения между элементами матричной функции $S(\lambda)$, из которых следует, что в обратной задаче рассеяния указанное согласование сохраняется также в самосопряженном случае а именно, задание матричной функции $S(\lambda)$ равносильно заданию $m-1$ комплексных функций на полупрямой или заданию $m-1$ вещественных функций на прямой.

Теорема 2. *Элементы матричной функции рассеяния*

$$S(\lambda)=[S_{kj}(\lambda)]_{k,j=0}^{m-1}, \quad \lambda\in l\setminus M,$$

самосопряженного дифференциального оператора L *порядка* $m\geqslant3$ *удовлетворяют соотношениям*

$$S_{m-j,\,m-k}(\bar\lambda)=\omega_j\bar\omega_k\overline{S_{kj}(\lambda)}, \quad k\neq j, \quad \lambda\omega_k+\overline{\lambda\omega_j}=0, \tag{4}$$

где считается, что $S_{mr}(\bar\lambda)=S_{0r}(\bar\lambda)$ *и* $S_{rm}(\bar\lambda)=S_{r0}(\bar\lambda)$, $r=1,2,\dots,m-1$, *причем, когда порядок* m *четный, системы соотношений* (4), *соответствующие случаям* $Re(\lambda\omega_k)>0$ *и* $Re(\lambda\omega_k)<0$, *совпадают и, в силу равенств* (3), *могут быть записаны в виде*

$$S_{k'j'}(\bar\lambda)=\omega_j\bar\omega_k\overline{S_{kj}(\lambda)}, \quad Re(\lambda\omega_k)>0, \quad \lambda\omega_k+\overline{\lambda\omega_j}=0, \tag{5}$$

где k' *и* j' *определяются из равенств* $\omega_{k'}=-\omega_k$ *и* $\omega_{j'}=-\omega_j$. *Для каждого* $\lambda\in l\setminus M$ *при нечетном* m *число соотношений* (4) *равно* $m-1$, *а при четном* $m=2m_0$ *число соотношений* (5) *на одном из произвольных соседних лучей* (2) *равно* m_0, *на другом равно* m_0-1.

Ереванский государственный университет

Ա. Ռ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ամբողջ առանցքի վրա հանրագումարելի գործակիցներով կամայական կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի ցրման մատրիցի կառուցվածքի մասին

Դիտարկվում է $L^2(-\infty,\infty)$ տարածությունում գործող $m\geqslant3$ կարգի L դիֆերենցիալ օպերատորը, որի գործակիցները ամբողջ առանցքի վրա հանրագումարելի կոմպլեքս ֆունկցիաներ են։ Հետազոտվում է L օպերատորի ցրման մատրիցի կառուցվածքը և մասնավորապես ապացուցվում է, որ ցրման հակադարձ խնդրում կա համաձայնեցվածություն տրվող ֆունկցիաների և որոշվող ֆունկցիաների թվերի միջև, թե՛ ընդհանուր դեպքում, թե՛ ինքնահամալուծ օպերատորի դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **D. J. Kaup,** Stud. Appl. Math., v. 62, № 3, p. 189—216 (1980).
2. **P. Deift, C. Tomei, E. Trubowitz,** Comm. Pure Appl. Math., v. 35, № 5, p. 567—628 (1982).
3. **P. J. Caudrey,** Physica, 6D, p. 51—66 (1982).
4. **R. Beals,** Amer. J. Math., v. 107, № 2, p. 281—366 (1985).
5. **И. Г. Хачатрян.** Изв. АН АрмССР, Математика, т. 18, № 5, с. 395—402 (1983).
6. **В. А. Марченко.** Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка, 1977.
7. **Б. М. Левитан.** Обратные задачи Штурма—Лиувилля, М., Наука, 1984.
8. **И. Г. Хачатрян.** Функц. анализ и его приложения, т. 17, № 1, с. 40—52 (1983).
9. **И. Г. Хачатрян.** Изв. АН АрмССР, Математика, т. 20, № 1, с. 41—52 (1985).