ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 4

УДК 539.3; 534.1

Теория упругости

Член-корреспондент НАН Армении **Б. Л. Абрамян, А. В. Саакян, А. В. Гаспарян**

О взаимной связи геометрических и физических параметров колеблющихся жестких фундаментов и их упругих оснований с сейсмическими параметрами

(Представлено 15/VI 1994)

Рассматривается задача о несимметричных установившихся колебаниях жесткого круглого в плане фундамента, сцепленного с упругим однородным основанием—полупространством.

На одной математической модели показывается способ определения амплитуд колебаний жестких фундаментов, колеблющихся под действием сейсмических влияний, с учетом сцепления фундамента с его упругим основанием.

Математическая модель задается в цилиндрической системе координат условиями

$$\left.\begin{aligned} &u_z|_{z=0}-\varepsilon=(\varepsilon_\omega+\varkappa_\omega r\cos\varphi)e^{i\omega t};\\ &u_r|_{z=0}=\gamma_\omega\cos\varphi e^{i\omega t},\ u_\varphi|_{z=0}=-\gamma_\omega\sin\varphi e^{i\omega t}\end{aligned}\right\}\ (r<R)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z(r,\varphi,0,t)=-\frac{Te^{i\omega t}\delta(r-r_0)\delta(\varphi)}{r_0}\\ &\tau_{rz}(r,\varphi,0,t)=\tau_{z\varphi}(r,\varphi,0,t)=0\end{aligned}\right|\ (r,r_0>R), \tag{1}$$

где использовались следующие обозначения: $\varepsilon=\dfrac{P(1-2\nu)}{4GR\ln(3-4\nu)}$—осадка центральной точки жесткого круглого в плане фундамента по В. И. Моссаковскому [1, 2], P—собственный вес фундамента, $\delta(s)$—функция Дирака, ε_ω, γ_ω и $\varkappa_\omega$—амплитуды, соответственно, вертикальных, горизонтальных и угловых колебаний фундамента, обусловленных действием гармонической силы $Te^{i\omega t}$, приложенной на поверхности упругого однородного полупространства—основания фундамента, на конечном расстоянии „r_0“ от него.

Амплитуды колебаний полагаются неизвестными и подлежат определению в дальнейшем с использованием условий динамического равновесия жесткого фундамента.

При решении задачи перемещения и напряжения представляются в виде тригонометрических рядов по координате φ в интервале $(0, \pi)$.

Для напряжений используются следующие ряды:

$$\sigma_z(r,\varphi,z,t)=\sigma_z^{(0)}(r,z,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_z^{(k)}(r,z,t)\cos(k\varphi);$$

$$\tau_{rz}(r,\varphi,z,t)=\bar{\tau}_{rz}^{(0)}(r,z,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\tau}_{rz}^{(k)}(r,z,t)\cos(k\varphi); \qquad (2)$$

$$\tau_{z\varphi}(r,\varphi,z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\tau}_{z\varphi}^{(k)}(r,z,t)\sin(k\varphi).$$

и условия динамического равновесия жесткого фундамента приводятся к виду

$$\int_0^R r\sigma_z^{(0)}(r,\omega)dr=-\frac{P\omega^2 z_\omega}{2\pi Gg};$$

$$\int_0^R r[\tau_{rz}^{(1)}(r,\omega)-\tau_{z\varphi}^{(1)}(r,\omega)]dr=-\frac{P\omega^2 y_\omega}{\pi Gg}; \qquad (3)$$

$$\int_0^R r^2\sigma_z^{(1)}(r,\omega)dr=\frac{M}{\pi G}-\frac{16PR^2\omega^2 x_\omega}{9\pi^3 Gg},$$

где $\sigma_z^{(s)}(r,\omega)=\dfrac{1}{G}\bar{\sigma}_z^{(s)}(r,0,t)e^{-i\omega t}$ $(s=0,1)$ нулевая и первая безразмерные гармоники возникшего под действием гармонической силы $Te^{i\omega t}$ дополнительного нормального напряжения под фундаментом; $\tau_{rz}^{(1)}(r,\omega)$, $\tau_{z\varphi}^{(1)}(r,\omega)$ — аналогичные гармоники касательных напряжений; M — амплитуда дополнительного гармонического момента вида $Me^{i\omega t}$, который может возникнуть на фундаменте, если на нем воздвигнуто упругое сооружение.

Учитывая представления перемещений и напряжений в виде рядов (2) в граничных условиях (1) модельной задачи, ее решение приведем к решению трех отдельных задач для нулевых, первых и остальных гармоник искомых величин, соответственно.

В настоящем сообщении не представляется возможным остановиться на подробностях решения задачи с разделенными граничными условиями. Отметим только, что эти задачи решаются при помощи скалярного и векторного потенциалов Φ и $\bar{\Psi}$ [3, 4]. Отметим также, что для определения амплитуды вертикальных колебаний фундамента достаточно решить граничную задачу только для нулевых гармоник. Для определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний необходимо решить граничную задачу только первых гармоник. Полное же представление о контактных напряжениях под фундаментом можно получить с учетом решений всех граничных задач для всех гармоник.

Для определения нулевых и первых гармоник контактных напряжений под фундаментом решением соответствующих граничных задач эти решения, в конечном итоге, сводятся к системам интегральных уравнений следующих видов:

$$\psi_i^{(0)}(t,\omega)=f_i^{(0)}(t,\omega)+\int_0^R K_{i1}^{(0)}(t,z,\omega)\psi_1^{(0)}(z,\omega)dz+\int_0^R K_{i2}^{(0)}(t,z,\omega)\psi_2^{(0)}(z,\omega)dz$$

$$(i=1,2;\ 0<t<R)\quad \psi_1^{(0)}=\sigma_z^{(0)},\ \psi_2^{(0)}=\tau_{rz}^{(0)}, \tag{4}$$

и

$$\psi_i^{(1)}(t,\omega)=f_i^{(1)}(t,\omega)+\int_0^R K_{i1}^{(1)}(t,z,\omega)\psi_1^{(1)}(z,\omega)dz+\int_0^R K_{i2}^{(1)}(t,z,\omega)\psi_2^{(1)}(z,\omega)dz+$$

$$+\int_0^R K_{i3}^{(1)}(t,z,\omega)\psi_3^{(1)}(z,\omega)dz\quad (i=1,\ 2,\ 3;\ 0<t<R) \tag{5}$$

$$\psi_1^{(1)}=\sigma_z^{(1)},\ \psi_2^{(1)}=\tau_{rz}^{(1)},\ \psi_3^{(1)}=\tau_{z\varphi}^{(1)},$$

Для определения же амплитуд колебаний жесткого фундамента, вызванных действием гармонической силы вида $Te^{i\omega t}$, с использованием условий динамического равновесия фундамента (3), получаются следующие выражения:

$$\varepsilon_\omega=\frac{4Gg}{4GgR-P(1-\nu)\omega^2}\left\{\frac{T}{\pi G}\int_0^\infty L_1^{(a)}(\beta,\omega)\frac{J_0(\beta r_0)\sin(\beta R)}{\beta}d\beta+\right.$$

$$+\int_0^R z\sigma_z^{(0)}(z,\omega)dz\int_0^\infty(1-\nu-L_1^{(a)}(\beta,\omega))\frac{J_0(\beta z)\sin(\beta R)}{\beta}d\beta+ \tag{6}$$

$$\left.+\int_0^R z\tau_{rz}^{(0)}(z,\omega)dz\int_0^\infty L_2(\beta,\omega)\frac{J_1(\beta z)\sin(\beta R)}{\beta}d\beta\right\};$$

$$\varkappa_\omega=\frac{9\pi^3 Gg}{R^2[3\pi^3 GgR+8P(1-\nu)\omega^2]}\left\{\frac{M(1-\nu)}{2\pi G}+\right.$$

$$+\frac{T}{\pi G}\int_0^\infty L_1^{(a)}(\beta,\omega)J_1(\beta r_0)\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta}\right)d\beta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^R z\sigma_z^{(1)}(z,\omega)dz\int_0^\infty(1-\nu-L_1^{(a)}(\beta,\omega))J_1(\beta z)\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta}\right)d\beta+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^R z\tau_{rz}^{(1)}(z,\omega)dz\int_0^\infty L_2(\beta,\omega)[J_2(\beta z)-J_0(\beta z)]\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta}\right)d\beta+ \tag{7}$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\gamma}^{R} z\tau_{r z}^{(1)}(z,\omega)dz\int_{0}^{\infty} L_2(\beta,\omega)[J_2(\beta z)+J_0(\beta z)]\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta}\right)d\beta\Big\};$$

$$\gamma_\omega=\frac{8Gg}{8GgR-P(2-\nu)\omega^2}\Big\{-\frac{2T}{\pi GR}\int_{0}^{\infty}\frac{L_2(\beta,\omega)J_1(\beta,r_0)}{\beta^2}[1-\cos(\beta R)-\beta R\sin(\beta R)]d\beta+$$

$$+\frac{1}{R}\int_{0}^{R} z\tau_{z}^{(1)}(z,\omega)dz\int_{0}^{\infty}\frac{L_2(\beta,\omega)J_1(\beta z)}{\beta^2}[1-\cos(\beta R)-\beta R\sin(\beta R)]d\beta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{R} z\tau_{rz}^{(1)}(z,\omega)dz\Big[\frac{\pi(2-\nu)}{4}-\frac{1}{2-\nu}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\mu_b}+L_1^{(b)}(\beta,\omega)\right)\Big(\sin(\beta R)J_0(\beta z)-$$

$$-\sin(\beta R)J_2(\beta z)+\frac{2(1-\cos(\beta R))J_2(\beta z)}{\beta R}\Big)\frac{d\beta}{\beta}- \tag{8}$$

$$-\frac{1}{2-\nu}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\mu_b}-L_1^{(b)}(\beta,\omega)\right)\Big(\sin(\beta R)J_2(\beta z)-\sin(\beta R)J_0(\beta z)+$$

$$+\frac{2(1-\cos(\beta R))J_0(\beta z)}{\beta R}\Big)\frac{d\beta}{\beta}\Big]-\frac{1}{2}\int_{0}^{R} z\tau_{z\varphi}^{(1)}(z,\omega)dz\Big[\frac{\pi(2-\nu)}{4}+$$

$$+\frac{1}{2-\nu}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\mu_b}+L_1^{(b)}(\beta,\omega)\right)\Big(\frac{2(1-\cos(\beta,R))J_2(\beta,z)}{R\beta}-$$

$$-\sin(\beta R)J_2(\beta z)-\sin(\beta R)J_0(\beta z)\Big)\frac{d\beta}{\beta}+\frac{1}{2-\nu}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\mu_b}-L_1^{(b)}(\beta,\omega)\right)\Big(\sin(\beta R)J_2(\beta,z)+$$

$$+\sin(\beta,R)J_0(\beta,z)-\frac{2(1-\cos(\beta,R))J_0(\beta,z)}{\beta R}\Big)\frac{d\beta}{\beta}\Big]\Big\}.$$

В полученных соотношениях использованы обозначения

$$\mu_s=\sqrt{\beta^2-s^2\omega^2},\quad L_1^{(s)}(\beta,\omega)=\frac{\beta\mu_s b^2\omega^2}{D(\beta,\omega)},\quad (s=a,b),\quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$
$$L_2(\beta,\omega)=\frac{\beta^2(2\beta^2-b^2\omega^2-2\mu_a\mu_b)}{D(\beta,\omega)},\quad D(\beta,\omega)=4\beta^2\mu_a\mu_b-(2\beta^2-b^2\omega^2)^2. \tag{9}$$

Амплитуды колебаний фундамента, с учетом его сцепления, обусловленного силами трения, с упругим однородным основанием, можно вычислить по формулам (6)—(8), в которых величины амплитуд в явном виде представлены зависящими от геометрических и физических параметров фундамента и его упругого основания, от амплитуды и частоты действующей на фундамент гармонической нагрузки, расстояния точки приложения этой нагрузки от фундамента. Амплитуды колебаний фундамента зависят также от нулевых и первых гармоник дополнительных контактных напряжений, возникших под фундаментом (т. е. амплитуды колебаний фундамента зависят от вида связи фундамента с его упругим основанием).

Формулы (6)—(8) использованы при получении удобных для численных расчетов систем интегральных уравнений (4) и (5) для определения численных значений нулевых и первых гармоник дополнительных контактных напряжений, возникающих под фундаментом от действия нагрузки $Te^{i\omega t}$.

Однако, если численные значения для нулевых и первых гармоник дополнительных контактных напряжений уже получены, тогда численные значения для амплитуд колебаний фундамента можно получить непосредственно из условий динамического равновесия фундамента [3].

Институт механики НАН Армении

Հայաստանի ԳԱԱ թղթակից անդամ Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ա. Վ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ
Ա. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Տատանվող կոշտ ֆունդամենտների և նրանց առաձգական հիմքերի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի և սեյսմիկ պարամետրերի միջև փոխադարձ կապի մասին

Գլանային կոորդինատային համակարգում վերցված մաթեմատիկական մի մոդելային խնդրի ուսումնասիրության օգնությամբ, որտեղ դիտարկվում են առաձգական համասեռ կիսատարածության մակերևույթի վրա ամրակցումով զետեղված բացարձակ կոշտ ֆունդամենտի ոչ սիմետրիկ տատանումները, արտածվել են ֆունդամենտի ուղղահայաց, հորիզոնական և անկյունային տատանումների ամպլիտուդները որոշելու համար բանաձևեր։

Այդ բանաձևերում ամպլիտուդների մեծությունները ներկայացվել են կախված կոշտ ֆունդամենտի և նրա առաձգական համասեռ հիմքի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերից, ինչպես նաև տատանումներ առաջացնող, կիսատարածության մակերևույթի վրա ֆունդամենտից վերջավոր հեռավորության վրա գործող հարմոնիկ դինամիկ ուժի ամպլիտուդից և հաճախականությունից։ Տատանումների ամպլիտուդները կախված են նաև ֆունդամենտի տակ առաջացած կոնտակտային լարումների միայն զրոյական և առաջին հարմոնիկներից, որոնք նախօրոք պետք է որոշվեն այդ հարմոնիկների համար ստացված ինտեգրալ հավասարումների համակարգերից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **В. И. Моссаковский.** ПММ, т. 18, вып. 2, с. 187—196 (1954).
2. **В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова.** Контактная задача математической теории упругости. Киев. Наукова думка. 1985.
3. **J. D. Achenbach.** Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Publ. Co Amsterdam, 1984.
4. **Б. Л. Абрамян, А. В. Гаспарян.** Изв. НАН РА. Механика, т. 47, № 3—4, с. 10—22 (1994).