ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

А. Г. Саруханян

Построение массивов Бомера—Холла

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. Г. Шукуряном 5 X 1994)

В работе вводится понятие параметрических блочных последовательностей Голея, при помощи которых построен массив Бомера—Холла нового порядка $4^{n-1}(4^n+k+1)mr$, где $2^n m$—порядок массива Бомера—Холла, $2^n r$—порядок матрицы Адамара, а k—длина последовательности Голея.

Пусть $A=(A_i)_{i=1}^n$ —последовательность действительных матриц порядка k. Функция

$$N_A(j)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i A_{i+j}^T, & j=1,2,\dots,n-1\\ 0 & j\geqslant n\end{cases}$$

называется непериодической автокорреляционной функцией последовательности A [1].

Две $(-1,+1)$—последовательности $A=(a_i)_{i=1}^n$, $B=(b_i)_{i=1}^n$ называются последовательностями Голея длины n, если $N_A(j)+N_B(j)=0$ для всех $j\geqslant 1$. Известны последовательности Голея длины $2^a 10^b 26^c$, где a, b, c—целые неотрицательные числа [2,3].

Определение 1 [4,5]. *Параметрическая матрица $H(A_1, A_2, A_3, A_4)$ порядка $4t$ называется массивом Бомера—Холла порядка $4t$, если выполняются условия:*

а) *элементы матрицы H имеют вид $\pm A_i$, $i=1, 2, 3, 4$;*

б) *строки (столбцы) матрицы H формально ортогональны;*

в) $HH^T=t\sum\limits_{i=1}^{4} A_iA_i^T\times I_{4t}$,

где $\times$—знак кронекеровского произведения, I_{4t}—единичная матрица порядка $4t$.

Определение 2. *Последовательности $A=\{A_i\}_{i=1}^n$, $B=\{B_i\}_{i=1}^n$, где A_i и B_i—параметрические матрицы порядка k, зависящие от параметров x_i, $i=1, 2, \dots, r$, назовем параметрическими блочными последовательностями Голея длины n и обозначим через $GPB(n, k, r)$, если выполняются условия*

$$A_iB_j^T=B_jA_i^T,\quad i, j=1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_iA_i^T+B_iB_i^T)=\frac{2nk}{r}\sum_{i=1}^{r}x_i^2I_k.$$

$$N_A(j)+N_B(j)=\sum_{i=1}^{n-j}(A_iA_{i+j}^T+B_iB_{i+j}^T)=0,$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Заметим, что при $x_i=\pm 1$, $i=1, 2, \ldots, r$, последовательности A и B называются просто блочными последовательностями Голея и обозначаются через $GB(n,k)$. Отметим также, что в работе [6] рассмотрены блочные последовательности Голея, когда матрицы A_i и B_i являются симметрическими и взаимно коммутативными $(-1,+1)$-матрицами.

Перейдем к построению $GPB(n,k,r)$-последовательностей.

Лемма 1. *Пусть существуют массив Бомера—Холла порядка $2^n m$ и матрица Адамара порядка $2^n r$. Тогда существуют параметрические матрицы C_i, $i=1,2,\ldots, 2^n$, порядка $2^n mr$, зависящие от четырех параметров, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$C_iC_j^T=0,\ i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n;$$

$$\sum_{i=1}^{2^n}C_iC_i^T=2^{2n-2}mr(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)I_{2^n mr}.$$

Теорема 1. *Если существуют массив Бомера—Холла порядка $2^n m$ и матрица Адамара порядка $2^n r$, то существуют $GPB(4^n+1,\ 4^n mr,\ 4)$—последовательности.*

Следствие 1. *Если существуют массив Бомера—Холла порядка $2^n m$ и матрица Адамара порядка $2^n r$, то существует массив Бомера—Холла порядка $2^{n-1}mr(2^{2n}+1)$.*

В работе [6] показано, что существование матриц Адамара порядка $4n_i$, $i=1, 2, \ldots, 7$, и массива Бомера—Холла порядка $4k$ позволяет построить новый массив Бомера—Холла порядка $16kn_1n_2n_3$ и матрицу Адамара порядка $16n_4n_5n_6n_7$. Следовательно, из теоремы 1 следует также

Следствие 2. *Если существуют массив Бомера—Холла порядка $4k$ и матрицы Адамара порядка $4n_i$, $i=1,2,\ldots,7$, то существуют также $GPB(2^8+1,\ 2^8kn_1n_2\ldots n_7,\ 4)$-последовательности и массив Бомера—Холла порядка $2^6(2^8+1)kn_1n_2\ldots n_7$.*

Следствие 4. *Существует массив Бомера—Холла порядка $2^6(2^8+1)k_1k_2\ldots k_8n_1n_2\ldots n_7$, где k_i—порядки T—матриц, а n_i—порядки матриц типа Вильямсона* [1,2].

Теорема 2. *Пусть существуют массив Бомера—Холла порядка $2^n m$ и матрица Адамара порядка $2^n r$. Тогда существуют четыре параметрические дополнительные блочные последовательности длины 4^n+k+1 с блочной размерностью $4^n mr$, где k—длина последовательностей Голея.*

Следствие 5. *Если существуют массив Бомера—Холла порядка $2^n m$, матрица Адамара порядка $2^n r$ и последовательности Голея длины k, то существует также массив Бомера—Холла порядка $4^{n-1}(4^n+k+1)mr$.*

В частности, при $n=2$ существует массив Бомера—Холла порядка $64(2^a 10^b 26^c+17)mr$, где $4m$—порядок массива Бомера—Холла, $4r$—порядок матрицы Адамара и a, b, c—целые неотрицательные натуральные числа. Это дает широкий класс массивов Бомера—Холла, включающий в себя множество новых порядков указанных массивов.

Институт проблем информации и
автоматизации НАН Армении

Հ. Գ. ՍԱՐՈՒԽԱՆՅԱՆ

Բոմեր-Հոլլի զանգվածների կառուցում

Աշխատանքում ներմուծված է Գոլեյի պարամետրական բլոկային հաջորդականությունների գաղափարը, որի օգնությամբ կառուցվում է $4^{n-1}(4^n+k+1)mr$ կարգի Բոմեր—Հոլլի զանգված, որտեղ $2^n m$-ը Բոմեր—Հոլլի զանգվածի կարգ է, $2^n r$-ը Հադամարի մատրիցի կարգ է, իսկ k-ն՝ Գոլեյի հաջորդականությունների երկարություն։

Մասնավորապես, կառուցվել են $64(2^a 10^b 26^c+17)mr$ կարգի Բոմեր—Հոլլի զանգվածներ, որտեղ $4m$-ը Բոմեր—Հոլլի զանգվածի կարգ է, $4r$-ը Հադամարի մատրիցի կարգ է, իսկ a, b, c-ն ցանկացած ոչ բացասական ամբողջ թվեր են։ Վերջինս ընդգրկում է Բոմեր—Հոլլի զանգվածների բազմաթիվ նոր կարգեր։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **H. Kharaghani**, Discrete Math., v. 120, p. 115—120 (1993).
2. **H. Kharaghani**, Australian J. Combin., № 6, p. 293—303 (1992).
3. **P. J. Robinson, J. S. Wallis**, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. Combinatorics, v. 18, p. 911—932 (1976).
4. **W. D. Wallis, A. P. Street, J. S. Wallis**, Lecture Notes in Math., v. 292, (1972).
5. **R. J. Turyn**, J. Combin. Theory, Ser. A, v. 16, p. 313—333 (1974).
6. **R. Craigen, J. Seberry, X. Zhang**, J. Combin. Theory, Ser. A, v. 59, p. 310—320 (1992).