ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 511.5

Академик НАН Армении Р. Р. Варшамов

Об одном способе упорядочивания множества целых чисел

(Представлено 20/I 1994)

С целью расширения возможностей современной математики вводится новый способ упорядочивания множества целых чисел.

Символ $\sum\limits_{u=a}^{b} f(u)$, где $a<b$—целые числа, означает

$$f(a)+f(a+1)+...+f(b).$$

Для $a>b$ сумма $\sum\limits_{u=a}^{b}$ не определена, под этим обычно понимается нуль. Зададимся, однако, вопросом определить сумму $\sum\limits_{u=a}^{b}$ с произвольными пределами суммирования и при этом так, чтобы ее функциональная зависимость при $a\leqslant b$ сохранила свое аналитическое выражение, т. е. чтобы метод был регулярным.

Ниже мы дадим новую формулировку определения суммы, придав этому понятию, по возможности, более широкое освещение. Для этой цели упорядочим множество целых чисел N следующим образом.

Для любой различной пары элементов a и $b \in N$ будем считать, что a предшествует b и писать $b>\equiv a$, если

$$a^{-1}>b^{-1}*$$

Легко видеть, что при таком способе упорядочивания всякое положительное число (включая и 0) предшествует отрицательному числу, а само множество N имеет как первый элемент 0, так и последний элемент -1, т. е. $N=[0, 1, 2, ..., -3, -2, -1]$**, и кроме того соблюдаются следующие два обязательных условия «аксиомы порядка»:

отношения $b>\equiv a$ и $a>\equiv b$ исключают друг друга;

если $b>\equiv a$ и $c>\equiv b$, то $c>\equiv a$ (транзитивность).

Условимся в дальнейшем обозначать буквами n, m, k натуральные числа, а a, b и c целые числа.

---

* Условно считая, что $0^{-1}=\infty$.

** В ряде случаев множество N целесообразно рассматривать как циклически замкнутое.

Пусть функция $f(x)$ вещественного переменного определена в каждой точке N и пусть $N_{a,b}$ является частью* множества N, означающей $[a, b]$, если $b \geqq a$, и $N \setminus (b, a)$, т. е. $[a, -1] \cup [0, b]$, если $a \geqq b$.

Определение. **Для любой пары целых чисел a и b**

$$\sum_{u=a}^{b} f(u) = \sum_{u \in N_{a,b}} f(u).^{**}$$

Нетрудно показать, что данное определение суммы удовлетворяет всем указанным выше требованиям. Аналогичным образом, очевидно, можно определить также и произведение $\prod_{a}^{b}$ с произвольнными пределами a и b. Придавая символу $\sum_{u}^{\infty}$ числовой смысл, потребуем выполнения некоторых весьма естественных условий (системы аксиом):

1) **если $S_n = \sum_{u=a}^{n} f(u)$ $\forall$ n, то $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{u=a}^{\infty} f(u)^{***}$;**

2) для любой пары чисел $b \geqq a$ имеет место равенство

$$f(b+1) - f(a) = \sum_{u=a}^{b} f(u+1) - f(u);$$

3) если $G = [a, b] \cup [a_1, b_1]$ и $[a, b] \cap [a_1, b_1] = \varnothing^{****}$,

$$\sum_{u \in G} f(u) = \sum_{u=a}^{b} f(u) + \sum_{u=a_1}^{b_1} f(u).$$

Примечание 1. Если $a \geqq b$, то по определению $N_{a,b} = [a, -1] \cup [0, b]$, где $[a, -1] \cap [0, b] = \varnothing$, и, в силу аксиомы 3

$$\sum_{u=a}^{b} f(u) = \sum_{u=a}^{-1} f(u) + \sum_{u=0}^{b} f(u).$$

Утверждение 1. **Для всякой тройки чисел a, b и c, удовлетворяющей условию $b \in N_{a,c}$, справедливо равенство**

$$\sum_{u=a}^{c} f(u) = \sum_{u=a}^{b} f(u) + \sum_{u=b+1}^{c}{}' f(u)^{*****}.$$

Утверждение 2. **Для любой пары чисел n и m**

$$\sum_{u=m}^{n} f(u) = \sum_{u=-n}^{-m} f(-u). \tag{1}$$

Лемма 1. **Пусть функция $F(x)$ является решением системы уравнений**

---

* Т. е. подмножество множества N, взаимный порядок которого с N одинаков.

** Соблюдая установленный порядок элементов $N_{a,b}$.

*** Знак $n \to \infty$ означает, что n неограниченно возрастает, не меняя знака.

**** Где $\varnothing$ символ пустого множества.

***** Штрих при знаке суммы означает, что $\sum_{u=b+1}^{c} f(u) = 0$, если $b = c$.

$$\begin{aligned} &F(a+1)-F(a)=f(a),\\ &F(a+2)-F(a+1)=f(a+1),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &F(c+1)-F(c)=f(c), \end{aligned} \tag{2}$$

где a и c некоторая фиксированная пара чисел. Тогда для любого числа b

$$\sum_{u=a}^{b} f(u)=F(c+1)-F(a)+\sum_{u=c+1}^{a-1}{}' f(u)-\sum_{u=b+1}^{a-1}{}' f(u). \tag{3}$$

Определение 2. Функцию $f(x)$, заданную на множестве N, для которой существует функция $F(x)$, удовлетворяющая системе (2) при $c=a-1$, назовем регулярной.

Утверждение 3. Для любой регулярной функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\sum_{u=a}^{a-1} f(u)=0. \qquad \forall a,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{u\in N} f(u)=0.$$

Приведенные ниже две леммы и их следствия в корне меняют наши представления о реальной действительности.

Лемма 2. Имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} N_{-n,n}=N.$$

Следствие леммы 2. Поскольку $N_{-n,n}=N\setminus(n,\ -n)$ то в силу леммы 2, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty}(n,\ -n)=\varnothing.$$

Лемма 3. Для всякой элементарной функции $F(x)$, заданной на множестве N, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}(F(n+1)-F(-n))=0.$$

Следствие леммы 3. Для любой элементарной функции $F(x)$, заданной на множестве N, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}(F(-(n+1))-F(n))=0. \tag{4}$$

Лемма 4. Для любой регулярной функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\sum_{u=a}^{b} f(u)=-\sum_{u=b+1}^{a-1} f(u) \qquad \forall\ a,\ b \tag{5}$$

Формула (5) автоматически вытекает из равенства (3), полагая в ней $c=a-1$.

• Т. е. функция, определенная формулами, содержащими конечное число алгебраических или тригонометрических операций, производимых над аргументом, функцией и некоторыми постоянными.

Примечание 3. **Из формулы (5), используя (1) и (4), находим**

$$\sum_{u=1}^{-n} f(u) = -\sum_{u=0}^{n-1} f(-u) \quad \forall\ n \tag{6}$$

и

$$\sum_{u=1}^{\infty} f(u) = -\sum_{u=0}^{\infty} f(-u). \tag{6'}$$

Утверждение 4. **Для всякой заданной на множестве N функции** $f(x)$, **удовлетворяющей условию** $\prod_{u=1}^{0} f(u)=1$, **справедливо равенство**

$$\prod_{u=0}^{-n} f(u) = \left(\prod_{u=1}^{n-1} f(-u)\right)^{-1}. \tag{7}$$

Приведем несколько очевидных следствий, вытекающих из трех предыдущих формул.

Покажем вначале, используя (6), что все нечетные числа Бернулли B_k (исключая $B_1=1/2$) равны нулю. В самом деле, так как функция $f(x)=x^k$ регулярна, поскольку $B_k(n)-B_k(n-1)=n^k$, где $B_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{u=0}^{k} C_{k+1}^{u} B_u n^{k+1-u} = \sum_{u=1}^{n} u^k$ многочлен Бернулли, то в силу (7) $B_k(-n) = (-1)^{k+1} B_k(n-1)$. Стало быть

$$B_k(n)-(-1)^{k+1}B_k(-n) = \frac{2}{k+1} \sum_{u=0}^{[2^{-1}(k-1)]} C_{k+1}^{2u+1} B_{2u+1} n^{k-2u} = n^k,$$

т. е. $B_1=1/2$ и $B_{2u+1}=0$, $u=1, 2,\ldots$

Опираясь далее на (7), распространим на множество целых чисел значения аргумента функции $n!$, определенной лишь для натуральных n. Пусть $\lambda(a) = \prod_{u=1}^{a} u = a!\ \forall a$. Тогда, очевидно $\lambda[0] = \prod_{u=1}^{0} u = 0! = 1$ и, следовательно, функция $f(u)=u$ удовлетворяет условию утверждения 4, что позволяет применить к ней формулу (7). Подставляя в (7) $f(u)=u$ можно заметить, что функция $\lambda(a)$, аналогично гамма-функции, в точках $a=-n, \forall n$ имеет простые полюса с вычетом, равным $(-1)^{n-1}\times \frac{1}{(n-1)!}$. Используя это обстоятельство, в частности, получим

$$C_{-n}^{m} = (-1)^m C_{n+m-1}^{m} \quad \text{и} \quad C_{-n}^{-m} = (-1)^{m+n} C_{m-1}^{n-1}. \qquad ([1]\ \text{с. } 13)$$

И, наконец, применяя (6'), можно сформулировать следующий важный в приложении факт:

Теорема 1. **Для любой четной регулярной функции $f(x)$ справедливо равенство**

$$\sum_{u=1}^{\infty} f(u) = -\frac{f(0)}{2}, \tag{8}$$

независимо от того, сходится или нет, в обычном смысле, ряд (8).

Определение 3. **Мы будем говорить, что бесконечная последовательность $F(1)$, $F(2)$, ... $F(n)$, ... (функция целочисленного аргу-**

мента) имеет своим пределом число A, и писать $\lim_{n\to\infty} F(n)=A$, если сумма ряда $\sum_{u=1}^{\infty} f(u)$, где $f(u)=F(u)-F(u-1)$*, равна A, т. е.

$$F(1)+(F(2)-F(1))+(F(3)-F(2))+\ldots=A.$$

Отметим, что данное определение, в частности совпадает с классическим определением предела последовательности, сходящейся в обычном смысле, и тем самым обобщает понятия предела на более широкий класс функций.

Опираясь на аксиому 1, можно вывести следующие два правила пределов:

I. Предел постоянной величины равен этой же величине, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} A=A.$$

II. Предел алгебраической суммы ограниченного числа последовательностей равен алгебраической сумме их пределов, т. е. в символах**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{u=1}^{k}\alpha_u F_u(n)=\sum_{u=1}^{k}\alpha_u \lim_{n\to\infty} F_u(n),$$

где α_u—вещественные числа.

Сводя вопрос сходимости числовых последовательностей к сумме соответствующих им рядов, из теоремы 1 можно вывести ряд интересных следствий.

Теорема 2. **Всякая нечетная на множестве $N_1=N+1/2$*** функция $\varsigma(x)$ удовлетворяет условию**

$$\lim_{n\to\infty}\varsigma(2\alpha n+\alpha)=0,$$

где α—вещественное число.

Теорема 3. **Всякая четная на множестве N_1 функция $\Psi(x)$ удовлетворяет условию**

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\Psi(2\alpha n+\alpha)=0.$$

Теорема 4. **Для любой регулярной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(-x)=f(x+1)$, справедливо равенство**

$$\sum_{u=1}^{\infty} f(u)=-1/2\lim_{n\to\infty} f(-n).$$

Имеет место также и более общая

Теорема 5. **Для всякой регулярной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(-x)=f(x+a)$, где a любое целое фиксированное число, справедливы равенства**

$$\sum_{u=1}^{\infty} f(u)=-1/2\left(\sum_{u=1}^{a}\lim_{n\to\infty} f(n+u)-\sum_{u=1}^{a-1} f(u)\right),$$

если $a>0$, и

---

* Полагая $F(0)=0$.

** В предположении разумеется, что предел каждой функции в отдельности существует.

*** Т. е. множество всевозможных чисел вида $n+1/2$.

$$\sum_{u=1}^{\infty} f(u)=1/2\ \Big(\sum_{u=0}^{-a-1}\lim_{n\to\infty} f(n-u)-\sum_{u=0}^{-a} f(-u)\Big),$$

если $a\leqslant 0$.

Теорема 6. **Всякий многочлен $f(x)$ над полем вещественных чисел удовлетворяет условию**

$$\lim_{n\to\infty}\ (-1)^n f(n)=0. \tag{9}$$

Теорема 7. **Всякий многочлен $f(x)$ над полем вещественных чисел удовлетворяет равенству**

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=-\int_0^{-1} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Вернемся вновь к многочленам Бернулли и докажем два хорошо известных факта относительно дзета-функции Римана, без добавочных представлений о функции комплексного переменного и аналитическом продолжении.

С одной стороны, согласно (6)

$$\frac{1}{k}B_k(-1)=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{u=0}^{k}(-1)^{k+1-u}C_{k+1}^{u}B_u=(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sum_{u=0}^{0}u^k=0^*.$$

С другой стороны, в силу (10)

$$\lim_{n\to\infty} B_{k-1}(n)=-\int_0^{-1} B_{k-1}(x)dx=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{u=0}^{k-1}(-1)^{u+k}C_{k+1}^{u}B_u=\sum_{u=1}^{\infty}u^{k-1}.$$

Складывая между собой два последних равенства, получим

$$\sum_{u=1}^{\infty}u^{k-1}=-\frac{B_k}{k}\qquad k=1,2,\ldots.\qquad ((3),\ с.\ 27).$$

Еще проще, используя (9) и формулу

$$\frac{(-1)^{n-1}}{k}\sum_{u=1}^{k}C_k^u(2^u-1)B_u n^{k-u}+\frac{(2^k-1)B_k}{k}=\sum_{u=1}^{n}(-1)^{u-1}u^{k-1},$$

находим

$$\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u-1}u^{k-1}=\frac{(2^k-1)B_k}{k}\qquad k=1,2,\ldots\quad ((3),\ с.\ 40)$$

Опираясь на (10) и известное разложение функции $\sin(x+1/2)$ в степеной ряд, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sin\ (n+1/2)=0,$$

и тем самым косвенно подтвердить справедливость теоремы 2. Действительно, известно, что

---

* Что фактически является формулой Луавра.

$$\sin(x+1/2)=\sin 1/2+x\cos 1/2-\frac{x^2\sin 1/2}{2!}-\frac{x^3\cos 1/2}{3!}+\ldots$$

Поэтому, согласно II* и формуле (10), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n+1/2)=\sin 1/2-\frac{\cos 1/2}{2!}-\frac{\sin 1/2}{3!}+\frac{\cos 1/2}{4!}+\ldots=$$

$$=\sin 1/2\cdot\sin 1+\cos 1/2(\cos 1-1)=0$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n+1/2)=0.$$

И, наконец, взяв арифметическую прогрессию

$$S_n=\sum_{u=1}^{n}a_u,$$

где $a_m=a_1+(m-1)d$, $m=1, 2,\ldots n$, $S_n=\left(\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right)n$,

и переходя к пределу, используя при этом равенство (10), получим

$$\lim_{m\to\infty}S_n=-\int_0^{-1}\left(\frac{2a_1+(x-1)d}{2}\right)x\,dx=\frac{5d-6a_1}{12}.$$

т. е.

$$\sum_{u=1}^{\infty}a_n=\frac{5d-6a_1}{12}.$$

В частности,

$$\sum_{u=1}^{\infty}n=1+2+3+\ldots=-\frac{1}{12},\qquad ((^3),\ \text{с. } 410)$$

или

$$\sum_{u=1}^{\infty}(2u-1)=1+3+5+\ldots=\frac{1}{3}\qquad ((^3),\ \text{с. } 426)$$

и т. д.

Прямым следствием теорем 3 и 6 является следующая

Теорема 8. **Пусть $A(x)$ и $B(x)$ две заданные на множестве N функции, удовлетворяющие условию $A(x)-B(x)=f(x)+\Psi(x+1/2)$, где $f(x)$ — многочлен над полем вещественных чисел, $\Psi(x)$ — любая функция, четная на множестве N_1. И пусть функция $\mu(u)$ принимает на множестве N значения $A(x)$, если $2|x$, и $B(x)$ в противном случае. Тогда**

---

* Формально требующее добавочно разъяснений, поскольку число слагаемых не ограничено.

$$\lim_{n\to\infty}\mu(n)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(A(n)+B(n)). \qquad (11)$$

Используя теорему 8, можно получить следующее равенство:

$$\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u-1}a_n=\frac{2a_1-d}{4},$$

где, как и прежде, $a_u=a_1+(u-1)d$, $u=1, 2,\ldots$

Так, например,

$$\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u-1}u=1-2+3-4+\ldots=\frac{1}{4}, \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 16)$$

или

$$\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u-1}(2u-1)=1-3+5-7+\ldots=0. \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 15).$$

Теорема 9. **Для всякого вещественного числа $g\neq 1$ имеет место равенство**

$$\sum_{u=0}^{\infty}g^u=\frac{1}{1-g}.$$

В частности

$$\sum_{u=0}^{\infty}2^u=1+2+4+\ldots=-1 \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 30)$$

или

$$\sum_{u=0}^{\infty}(-1)^u2^u=1-2+4-\ldots=\frac{1}{3} \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 23)$$

Теорема 10. **Для любого целого числа a и вещественного $|x|<1$* справедливо равенство**

$$(1+x)^a=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{\lambda(a)}{\lambda(u)\lambda(a-u)}x^u=1+C_a^1x+C_a^2x^2+\ldots$$

Так, например,

$$(1+1)^{-1}=1-1+1-\ldots=1/2, \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 15)$$

$$(1+1)^{-2}=1-2+3-4+\ldots=1/4, \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 16)$$

$$(1+1)^{-3}=1-3+6-10+\ldots=1/8. \qquad ((^3),\ \text{с.}\ 124)$$

В заключение рассмотрим один из исторических парадоксов, возникший в результате дискуссии между Эйлером и Н. Бернулли по поводу известного принципа Эйлера (^{3}) о том, что «сумма каждого ряда есть значение того конечного выражения, из развертывания которого возникает этот ряд». Бернулли возражал против этого утвержде-

* Это ограничение не существенно.

ния, заявляя, что один и тот же ряд может «возникнуть» из двух различных «выражений», которые доставляли бы различные значения. Впоследствии Кайе заметил, что ряд

$$1-1+1-1+\dots \tag{12}$$

возникает, если положить $x=1$ в разложение

$$\frac{\theta_m(x)}{\theta_n(x)}=1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\dots \tag{13}$$

при любых m и n $(m<n)$, где $\Theta_m(x)=1+x+\dots+x^{m-1}$ что, казалось бы, позволяет, в силу принципа Эйлера приписывать ряду (12) любую сумму m/n. Однако это не так. Действительно, если формулу (13) рассматривать как результат деления многочлена $\Theta_m(x)$ на $\Theta_n(x)$, то тогда очевидно, что для любого числа k будет иметь место разложение

$$\frac{\theta_m(x)}{\theta_n(x)}=\sum_{u=0}^{k-1}(-1)^u x^{l(u)}+R_k(x)x^{l(k)}, \tag{14}$$

где $\quad l(u)=n\left[\frac{u}{2}\right]+2m\left\{\frac{u}{2}\right\}$ и $R_k(x)=(-1)^k\frac{\theta_v(x)}{\theta_n(x)}$,

$$v=m+(2n-4m)\left\{\frac{k}{2}\right\}.$$

Полагая в (14) $x=1$ и переходя к пределу, мы получим

$$\frac{m}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{u-1}+\lim_{k\to\infty}R_k(1). \tag{15}$$

Но выражение $R_k(1)$ как функция от переменного k принимает значение $\frac{m}{n}$, если $2\mid k$, и $\frac{m-n}{n}$ в противном случае. Следовательно, в силу (11) будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}R_k(1)=1/2\lim_{k\to\infty}\left(\frac{m-n}{n}+\frac{m}{n}\right)=\frac{2m-n}{2n}$$

или согласно (15)

$$\frac{m}{n}-\frac{2m-n}{2n}=\frac{1}{2}=\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u-1}=1-1+1-1\dots$$

Стало быть во всех случаях, т. е. при любых значениях n и m, сумма ряда (12) равна $1/2$, а значит и парадокса тут фактически никакого нет.

Рассмотренный нами пример показал, что оба из спорящих—и Эйлер, и Н. Бернулли фактически были неправы. Однако для разрешения их спора Эйлеру достаточно было лишь уточнить свой принцип следующим образом:

Сумма всякого ряда есть значение того конечного выражения, из развертывания которого возникает этот ряд, **минус значение предела его добавочного члена**, и тогда ему, очевидно, уже никто не смог бы возразить. Однако надо учесть и то, что вычислять пределы неограниченных или колеблющихся функций в то время еще не умели.

Заключение. Данная работа фактически была предвосхищена Валлисом и Эйлером. «В одном случае Валлис из неравенства $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ для натуральных чисел заключил, что $\frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{2}$ т. е. что отрицательные числа больше бесконечности. Эту же точку зрения позднее высказал и Эйлер... показав в «Основаниях дифференциального исчисления», что положительные и отрицательные числа связаны переходом через бесконечность» ([4], с. 18). Это привело к открытиям, представляющим собой знания качественно нового характера, которые позволяют: вычислять пределы неограниченных и колеблющихся функций, с единых позиций суммировать бесконечные ряды и т. д. и кроме того свидетельствовать о том, что пространство является бесконечно замкнутым и конечным. Аналогичную мысль (правда, из других соображений) высказал Риман (1854).

Все основные результаты статьи выглядят несколько необычно и даже кажутся абсурдными. Однако их нельзя опровергнуть, поскольку они не приводят к противоречию в строгом математическом смысле, а все их многочисленные следствия и приложения в различные разделы математики вполне конкретны и реальны. И тем не менее все они были перепроверены на обширном аналитическом материале, и все они без исключения оказались верными. Естественно предположить, что верными будут также и другие результаты, полученные аналогичным путем, а наши действия и рассуждения — обоснованными.

Институт проблем информатики и
автоматизации НАН Армении

Ռ. Ռ. ՎԱՐՇԱՄՈՎ

Ամբողջ թվերի բազմության կարգավորման մի եղանակի մասին

Ամբողջ թվերի բազմության կարգավորման մի նոր եղանակ է տըրվում, որը բերում է ոչ պարադիգմալ արդյունքների, այսինքն այնպիսի նոր գիտական փաստերի հայտնագործման, որոնք տրամաբանորեն չեն հետևվում գոյություն ունեցող տեսություններից (պարադիգմներից), չեն տեղավորվում նրանցում և չեն կարող բացատրվել նրանց օգնությամբ։

Թվային անվերջ հաջորդականությունների սահմանի հասկացողության նոր, ավելի լայն մեկնաբանություն է բերվում, որը հնարավորություն է տալիս գտնել անսահմանափակ և տատանվող ֆունկցիաների սահմաններ՝ միասնական դիրքերից ելնելով հաշվել տարամետ շարքերի գումարներ և այլն։

Հոդվածում դիտարկված են տարամետ շարքերին վերաբերվող Էյլերի սկզբունքի հետ կապված Կայեի պարադոքսը, ինչպես նաև մի շարք կոնկրետ օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **Дж. Риордан**, Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963. [2] **Е. К. Титчмарис**, Теория дзета-функции Римана, М., ИЛ, 1953. [3] **Г. Харди**, Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951. [4] **Г. Вилейтнер**, История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., Наука, 1966.