ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН Армении В. С. Саркисян, С. В. Саркисян, Х. Нур

# К определению касательных напряжений при кручении стержня криволинейного поперечного сечения, обладающего прямолинейной анизотропией

(Представлено 11/XI 1993)

Исследованию задач кручения анизотропных стержней посвящено много работ ([1–5]). В них в основном рассмотрены анизотропии таких видов, когда главные направления ортотропии совпадают с координатными линиями, в которых решаются задачи, например, прямолинейная анизотропия — область, ограниченная прямолинейными координатными линиями, и т. п.

В настоящей работе исследуется кручение призматического стержня криволинейного поперечного сечения, обладающего прямолинейной анизотропией.

1. Рассмотрим кручение стержня с сечением в виде кругового сектора, материал которого обладает прямолинейной анизотропией (неортотропией) ([2–4]).

Представим исследуемую краевую задачу в полярной координатной системе

$$[1+\delta a_1(\theta)]\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+[1-\delta a_1(\theta)]\cdot\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right]-$$

$$-2\delta a_2(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=-A_0, \tag{1.1}$$

$$\Phi(r,0)=\Phi(r,\alpha)=0,\quad \Phi(a,\theta)=0 \tag{1.2}$$

Здесь приняты обозначения работы ([4]) и кроме того введены

$$\delta=\frac{a_{44}-a_{55}}{a_{44}+a_{55}}<1\ (a_{44}>a_{55}),\quad k_1=\frac{2a_{45}}{a_{44}-a_{55}}, \tag{1.3}$$

$$A_0=\frac{4\theta}{a_{44}+a_{55}},\ a_1(\theta)=\cos 2\theta-k_1\sin 2\theta,\ a_2(\theta)=\sin 2\theta+k_1\cos 2\theta. \tag{1.4}$$

Нетрудно заметить, что частное решение краевой задачи (1.1)—(1.2) можно представить так:

$$\Phi^*(r, \theta) = -\frac{\vartheta r^2}{2a_{55}(1+\bar{k}_1 \mathrm{tg}\,\alpha)}\left[1 - \frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right]\left(\bar{k}_1 = \frac{a_{45}}{a_{55}}\right). \qquad (1.5)$$

Для нахождения однородного решения дифференциального уравнения (1.1) представим

$$\Phi^\circ(r, \Theta) = r^\lambda \cdot \varphi(\Theta) \qquad (1.6)$$

и, полагая

$$V(\theta) = \varphi(\theta) \cdot \left|\frac{1-\delta a_1(\theta)}{1-\delta a_1(\alpha)}\right|^{\frac{1-\lambda}{2}}, \qquad (1.7)$$

получим следующее нормальное дифференциальное уравнение:

$$V''(\Theta) + l(\Theta)\cdot V(\Theta) = 0, \qquad (1.8)$$

где $\lambda$—произвольный параметр,

$$l(\theta) = [1-\delta a_1(\theta)]^{-2}\cdot[\lambda^2 - 2\delta a_1(\theta) - \delta^2(\lambda^2 b_0 + a_3(\theta))], \qquad (1.9)$$

$$b_0 = 1 + k_1^2, \quad a_3(\theta) = \widetilde{C}_0 + \widetilde{C}_1 \cos 4\theta + k_1 \sin 4\theta,$$

$$\widetilde{C}_0 = -\frac{3}{2}(1+k_1^2), \quad \widetilde{C}_1 = \frac{1}{2}(k_1^2 - 1) \qquad (1.10)$$

Учитывая, что $|\delta a_1(\Theta)| < 1$, (1.9) можно записать

$$l(\theta) = \lambda^2 + 2\delta(\lambda^2 - 1)a_1(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty}\{\lambda^2\delta^n[(n+1)a_1^n(\theta) + (1-n)b_0 a_1^{n-2}(\theta)] -$$

$$-\delta^n[2n a_1^n(\theta) + (n-1)a_3(\theta)a_1^{n-2}(\theta)]\} \qquad (1.11)$$

Собственные значения (числа) $\lambda_k$ нашей задачи, согласно граничным условиям (1.2), определяются из следующего уравнения:

$$\widetilde{V}_1(0, \lambda)\cdot \bar{V}_2(\alpha, \lambda) - \widetilde{V}_1(\alpha, \lambda)\cdot \bar{V}_2(0, \lambda) = 0, \qquad (1.12)$$

где $\widetilde{V}_1(\Theta, \lambda)$, $\bar{V}_2(\Theta, \lambda)$—фундаментальные решения уравнения (1.8).

Следовательно, общее решение неоднородной задачи (1.1)—(1.2) будет

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{\vartheta r^2}{2a_{55}(1+\bar{k}_1 \mathrm{tg}\,\alpha)}\left[1 - \frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k}\left|\frac{1-\delta a_1(\theta)}{1-\delta a_1(\alpha)}\right|^{\frac{1-\lambda_k}{2}}(C_{k1}\widetilde{V}_{k1}(\theta, \lambda_k) + C_{k2}\bar{V}_k(\theta, \lambda_k)). \qquad (1.13)$$

В общем случае нахождение $\widetilde{V}_{k1}(\Theta, \lambda_k)$ и $\bar{V}_{k2}(\Theta, \lambda_k)$ представляет из себя почти непреодолимую математическую проблему. Ниже приведем некоторые конкретные случаи, когда бывает возможно найти эти функции.

1°. Материал стержня изотропный ($\delta = 0$). Тогда

$$V_{1k}(\Theta, \lambda_k) = \sin\lambda_k\Theta, \quad V_{2k}(\Theta, \lambda_k) = \cos\lambda_k\Theta,$$

$$\lambda = \lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad l(\Theta) = \lambda^2, \qquad (1.14)$$

что совпадает с результатами, полученными в ([1]).

2°. Предположим, что материал стержня обладает слабой ортотропией ($k_1=0$) так, что в (1.11) можно пренебречь степенью $\delta^2$ и членами высшего порядка. Тогда из (1.11) будем иметь

$$I(\Theta)=\lambda^2+2\delta\,(\lambda^2-1)\cos 2\Theta, \tag{1.15}$$

а дифференциальное уравнение (1.8) приводится к уравнению Матье ([6]).

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+(a+16q\cos 2\theta)\,V=0,\quad a=\lambda^2,\ q=\frac{\delta}{8}(\lambda^2-1). \tag{1.16}$$

Решением уравнения (1.16) являются функции Матье порядка n $ce_n(\Theta, q)$ и $se_n(\Theta, q)$, и, следовательно, из (1.12) можно определить $\lambda_n$ и функцию напряжений $\Phi(r, \Theta)$.

3°. Пусть материал стержня неортотропен и имеет место такая анизотропия, что в (1.11) можно пренебречь степенью $\delta^2$ и членами высшего порядка. Тогда

$$I(\Theta)=\lambda^2+2\delta(\lambda^2-1)\,(\cos 2\Theta-k_1\sin 2\Theta), \tag{1.17}$$

а уравнение (1.8) приводится к уравнению Хилла ([6])

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+(a+16q\Psi(2\theta))V=0, \tag{1.18}$$

где $\psi(2\Theta)=\cos 2\Theta-k_1\sin 2\Theta$ имеет период $\pi$ по аргументу $\Theta$.

4°. Материал стержня обладает прямолинейной ортотропией общего вида и нет ограничений на $\delta$ (разумеется, кроме единственного ограничения $\delta<1$). Это всегда имеет место, если материал ортотропен ($k_1=0$). Тогда (1.11) можно представить так:

$$I(\theta)=q_0+2\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos 2n\theta, \tag{1.19}$$

где

$$q_0=\lambda^2+\frac{\delta^2(\lambda^2-1)}{2}+\frac{3\delta^4(\lambda^2-1)}{8}+\ldots,$$

$$2q_1=2\delta(\lambda^2-1)+\delta^3(\lambda^2-1)+\ldots,$$

$$2q_2=\frac{3}{2}\delta^2(\lambda^2-1)+\delta^4(\lambda^2-1)+\ldots,$$

$$2q_3=\delta^3(\lambda^2-1)+\ldots,$$

$$2q_4=\frac{5}{8}\delta^4(\lambda^2-1)+\ldots,$$

. . . . . . . . . . . . .

В этом случае придем к уравнению Хилла ([6])

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+\left(q_0+2\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos 2n\theta\right)V=0. \tag{1.20}$$

Для решения задачи до конца необходимо определить $q_i$ ($i=0, 1, \ldots$), т. е. $\lambda$.

2. **Метод решения задачи.** Займемся определением собственных значений (чисел) и собственных функций уравнения (1.8) с однородным граничным условием.

Здесь предлагается метод, который позволяет определить собственные числа с любой наперед заданной точностью. Так как дифференциальное уравнение (1.8) содержит малый параметр $\delta$, то собственные значения и соответствующие собственные функции будут зависеть от $\delta$. Поэтому естественно функцию $V(\Theta)$ и $\lambda^2$ представить в виде рядов по степеням $\delta$:

$$V=V_0+\delta V_1+\delta^2 V_2+\ldots, \qquad \lambda^2=\lambda_0+\delta\lambda_1+\delta\lambda_2+ \tag{2.1}$$

Согласно (2.1) и (1.11) из (1.8) для определения $V_0(\Theta)$ получим однородное уравнение, а для $V_i(\Theta)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ —неоднородные уравнения. Решение полученного однородного уравнения с учетом граничных условий будет

$$V_0(\theta)=V_{0n}(\theta)=A_n\sin\sqrt{\lambda_0}\,\theta,\quad \lambda_0=\lambda_{0n}=\frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2} \tag{2.2}$$

Из условия разрешимости полученных неоднородных уравнений и условия ортогональности их решений с решением нулевого приближения ([4]) находятся $\lambda_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ для данного приближения. Таким образом, получается процесс, где шаг за шагом улучшаются найденные значения собственных чисел. Выполняя эту процедуру, например, для $\lambda_1$ и $V_1(\Theta)$, будем иметь

$$\lambda_1=\frac{\lambda_0}{2}\left[k_1-(\sin 2\alpha+k_1\cos 2\alpha)\right], \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} V_{1n}(\theta)={}&A_n\sin\sqrt{\lambda_0}\,\theta\left\{1+\frac{1}{4\sqrt{\lambda_0}}\left[(\lambda_0-1)\left(\frac{\cos 2(1+\sqrt{\lambda_0})\theta-k_1\sin 2(1+\sqrt{\lambda_0})\theta}{1+\sqrt{\lambda_0}}+\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.+\frac{\cos 2(\sqrt{\lambda_0}-1)\theta+k_1\sin 2(\sqrt{\lambda_0}-1)\theta}{\sqrt{\lambda_0}-1}\right)+\lambda_1\frac{\cos\sqrt{\lambda_0}\,\theta}{\sqrt{\lambda_0}}\right]\right\}-\\ &-A_n\cos\sqrt{\lambda_0}\,\theta\left\{\frac{k_1\sqrt{\lambda_0}}{2}+\frac{1}{4\sqrt{\lambda_0}}\left[(\lambda_0-1)\left(-2(\sin 2\theta+k_1\cos 2\theta)+\right.\right.\right.\\ &+\frac{\sin 2(1+\sqrt{\lambda_0})\theta+k_1\cos 2(1+\sqrt{\lambda_0})\theta}{1+\sqrt{\lambda_0}}+\\ &\left.+\frac{\sin 2(\sqrt{\lambda_0}-1)\theta-k_1\cos 2(\sqrt{\lambda_0}-1)\theta}{\sqrt{\lambda_0}-1}\right)+\\ &\left.\left.+\lambda_1\left(\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_0}\,\theta}{\sqrt{\lambda_0}}-2\theta\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Итак, можно определить все $\lambda_i$ и $V_i(\Theta)$ $(i\geqslant 2)$ и далее при помощи (2.1), (1.13), (1.7), (1.6) можно записать выражение для функции $\Phi(r,\ \Theta)$. Ограничиваясь первым приближением, решение исследуемой краевой задачи будет

$$\Phi(r,\ \theta)=-\frac{\theta r^2}{2a_{55}(\cos\alpha+k_1\sin\alpha)}\left[\cos\alpha-\cos(2\theta-\alpha)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n^*(\delta,\,\alpha)}\left[\frac{1-\delta a_1(\theta)}{1-\delta a_1(\alpha)}\right]^{\frac{1-\lambda_n^*}{2}}(V_{0n}+\delta V_{1n}), \tag{2.5}$$

где

$$\lambda_n^*(\delta,\,\alpha)=\frac{\pi n}{\alpha}\sqrt{1+0{,}5\delta\left[k_1-(\sin 2\alpha+k_1\cos 2\alpha)\right]}\,.$$

Имея функцию $\Phi(r,\Theta)$, с помощью известных формул определяются компоненты касательных напряжений и жесткость стержня.

Ереванский государственный университет
Мансурский университет, Египет

Հայաստանի ԳԱԱ թղթակից անդամ Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ս. Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Հ. ՆՈՒՐ

## Կորագիծ լայնական կտրվածքով ուղղագծային անիզոտրոպիա ունեցող ձողի ոլորման ժամանակ շոշափող լարումների որոշման մասին

*Անիզոտրոպ ձողերի ոլորման խնդիրներին նվիրված աշխատանքներում հիմնականում դիտարկվում են այնպիսի անիզոտրոպիաներ, երբ օրթոտրոպիայի գլխավոր առանցքները համընկնում են կոորդինատական գծերի հետ, օրինակ, ուղղագծային անիզոտրոպիա՝ ուղղագիծ կոորդինատական գծերով սահմանափակված տիրույթ և այլն։*

*Աշխատանքում հետազոտվում է ուղղագծային անիզոտրոպիա ունեցող սեկտորիալ լայնական կտրվածքով ձողի ոլորման խնդիրը։ Կիրառելով փոփոխականների անջատման մեթոդը, ստացվում է անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ նորմալ դիֆերենցիալ հավասարում։*

*Ցույց են տրված խնդրի լուծման մի շարք դեպքեր, երբ հնարավոր է լինում կառուցել ֆունդամենտալ լուծումները։ Ունենալով լարման ֆունկցիան, կարելի է որոշել շոշափող լարումների վարքը սկզբնակետի շրջակայքում։*

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян,** Кручение упругих тел. Гос. изд-во физ.-мат. лит., М., 1963. [2] **С. Г. Лехницкий.** Кручение анизотропных и неоднородных стержней, М., Наука, 1971. [3] **С. Г. Лехницкий.** Теория упругости анизотропных тел. М., Наука, 1977. [4] **В. С. Саркисян,** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во ЕГУ, 1976. [5] **J. Mamrilla, A. Mamrillova, V. Sarkisjan.** Niektore problémy matematickej teorie pruznosti anizotropného a nehomogenného telesa. Vydala Univerita Komenského v Bratislave, 1988. [6] **Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон,** Курс современного анализа. Т. 2. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.