

УДК 539.3

Л. А. Мовсисян

О нелинейных колебаниях анизотропной вязкоупругой  
 слоистой цилиндрической панели

(Представлено чл.-корр. НАН Армении В. С. Саркисяном 4 X 1993)

Изучаются одномерные нелинейные (геометрически) вынужденные колебания цилиндрической панели, изготовленной из анизотропных вязкоупругих слоев, симметрично или антисимметрично собранных относительно срединной поверхности (1). Рассмотрены два случая крайних условий.

1. Одномерные уравнения колебаний цилиндрической оболочки имеют вид (1,2).

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \bar{\rho}h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial y} = \bar{\rho}h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{T}{R} + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \bar{\rho}h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(y, t)$$

( $\bar{\rho} = 2\rho r$ ,  $2n$ —число слоев,  $\rho$ —плотность материала).

Для усилий и момента будем иметь (1).

$$T = \tilde{C}_{33}\epsilon, \quad S = \tilde{C}_{66}\gamma + \tilde{K}_{30}x, \quad M = \tilde{D}_{32}x + \tilde{K}_{30}\dot{\gamma} \quad (1.2)$$

при антисимметричном расположении слоев и

$$T = \tilde{C}_{22}\epsilon + \tilde{C}_{26}\gamma, \quad S = \tilde{C}_{20}\epsilon + \tilde{C}_{66}\gamma, \quad M = \tilde{D}_{22}x \quad (1.3)$$

при симметричном расположении слоев.

Для компонент деформаций имеем

$$\epsilon = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

Как обычно (2), инерционными членами в первых двух уравнениях будем пренебрегать.

В выражения  $\tilde{C}_{ij}$ ,  $\tilde{K}_{ij}$ ,  $\tilde{D}_{ij}$  входят упругая и вязкая части согласно формулам (1.6) и (1.9) по (1):

$$\tilde{C}_{ij} = C_{ij}(1 - c_{ij}\Gamma^*), \quad \tilde{K}_{ij} = K_{ij}(1 - k_{ij}\Gamma^*), \quad \tilde{D}_{ij} = D_{ij}(1 - d_{ij}\Gamma^*) \quad (1.5)$$

Рассмотрим два случая краевых условий:

2. В случае антисимметричного расположения слоев, когда края панели свободно оперты —

$$w = T = S = M = 0 \text{ при } y = 0, y = l, \quad (2.1)$$

в предположении, что

$$q = q_0 \sin \lambda y \sin p t, \quad \lambda = \pi/l, \quad (2.2)$$

решение уравнений колебания будем искать в виде

$$u = \varphi \cos \lambda y, \quad v = \psi \cos \lambda y, \quad w = f \sin \lambda y. \quad (2.3)$$

Тогда между  $f$  и  $\varphi$  получится следующая связь:

$$f = A \sin (pt + \alpha), \quad \varphi = B \sin (pt + \alpha + \gamma) \quad (2.4)$$

$$B = \frac{K_{23}}{C_{66}} X_1 A, \quad X_1 = \frac{1 - k_{26}\Gamma_c}{(1 - c_{66}\Gamma_c)\cos\gamma - c_{66}\Gamma_s \sin\gamma} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(k_{26} - c_{66})\Gamma_s}{(1 - c_{66}\Gamma_c)(1 - k_{26}\Gamma_c) - k_{26}c_{66}\Gamma_s^2}$$

$\Gamma_c, \Gamma_s$  — с точностью до множителя косинус и синус преобразования ядра оператора  $\Gamma^*$ .

А уравнения для определения  $A$  и  $\alpha$  будут:

$$\omega_1^2 A + X_2 A^2 = \rho^2 A + \frac{q_0}{\rho h} \cos \alpha, \quad (2.6)$$

$$\omega_2^2 A + X_3 A^2 = -\frac{q_0}{\rho h} \sin \alpha,$$

$$\omega_1^2 = \frac{\lambda}{\rho h} \left( \lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left( D_{11}^{(1)} - \frac{K_{26}^2}{C_{66}} \Gamma_{cs}^{(1)} \right),$$

$$\omega_2^2 = \frac{\lambda^2}{\rho h} \left( \lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right) \left( D_{22}^{(2)} - \frac{K_{26}^2}{C_{66}} \Gamma_{cs}^{(2)} \right),$$

$$D_{11}^{(1)} = D_{22}(1 - d_{22}\Gamma_c), \quad D_{22}^{(2)} = D_{22}d_{22}\Gamma_s,$$

$$\Gamma_{cs}^{(1)} = |\cos\gamma - k_{26}(\Gamma_c \cos\gamma + \Gamma_s \sin\gamma)| X_1$$

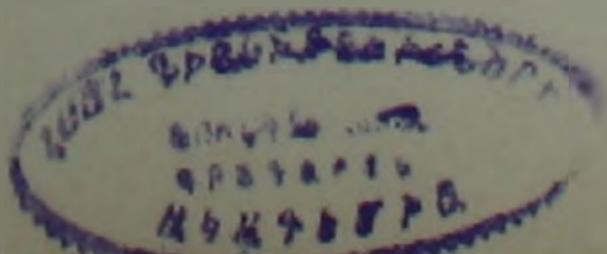
$$\Gamma_{cs}^{(2)} = |\sin\gamma(1 - k_{26}\Gamma_s) + k_{26}\Gamma_s \cos\gamma| X_1$$

$$X_2 = \frac{9C_{22}}{32\rho h} \lambda^4 (1 - c_{22}\Gamma_c), \quad X_3 = \frac{9C_{22}}{32\rho h} \lambda^4 c_{22}\Gamma_s.$$

На основании (2.6) резонансная кривая будет

$$\rho^2 = \omega_1^2 + X_2 A^2 \pm \left[ \left( \frac{q_0}{\rho h A} \right)^2 - (\omega_2^2 + X_3 A^2)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.7)$$

разность фаз определится из (2.6). Амплитудно-частотная кривая (2.7) имеет характерный вид (см., например, (2)). От (2) (с. 214) отличается членом  $X_3 A^2$ . Наличие такого члена приводит к тому, что кривая типа изображенной на рис. 13.10 (3) деформируется, правая ветвь ого-



двигается налево, а левая — направо, петля суживается, причем чем больше амплитуда, тем больше ее влияние.

В упругом случае в вышеприведенных формулах надо положить  $\Gamma_c = \Gamma_s = 0$ , а собственная частота определится формулой

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \beta A^2 \right), \quad \beta = \frac{3C_{22}\lambda^4}{8\omega_0^2}, \quad (2.8)$$

$$\omega_0^2 = \left( D_{22} - \frac{K_{26}^2}{C_{66}} \right) \frac{\lambda^2}{\rho h} \left( \lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right).$$

Из приведенных формул получится и случай симметричного расположения слоев — необходимо только  $D_{22} - K_{26}^2/C_{66}$  заменить на  $D_{22}$ .

3. В случае шарнирного закрепления на концах панели будем иметь условия

$$u = v = w = M = 0, \quad y = 0, \quad y = l. \quad (3.1)$$

Здесь приведем решение для случая симметричного распределения слоев. Сжимающее усилие определяется как в (2); при предположении  $w = f \sin \lambda y$  для него получим

$$T = \tilde{C}_{22} \left( \frac{\pi^2}{4} \frac{f^2}{l^2} - \frac{2}{\pi} \frac{f}{R} \right), \quad (3.2)$$

а для неизвестной  $f$

$$\frac{d^2 f}{d t^2} + a_1 f - a_2 f^2 + a_3 f^3 = \frac{Q_0 \sin \pi t}{\rho h}, \quad (3.3)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\rho h} \left( \tilde{D}_{22} \lambda^4 + \frac{8\tilde{C}_{22}}{\pi^2 R^2} \right),$$

$$a_2 = \frac{3\tilde{C}_{22}\pi}{Rl^2}, \quad a_3 = \frac{\tilde{C}_{22}\pi^4}{4l^4}.$$

Решение (3.3) строится, как и в предыдущем пункте, лишь с той разницей, что осреднение по  $t$  осуществляется по четверти периода, и окончательно для амплитудно-частотной кривой получим

$$P^2 = \omega_1^2 - \frac{X_1^2}{4X_2} + \frac{1}{X_3} (AX_2 - X_1)^2 \pm \left\{ \left( \frac{Q_0}{\rho h A} \right)^2 - \left[ \omega_2^2 - \frac{Y_1}{4Y_2} + \frac{1}{4Y_2} (AY_2 - Y_1)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ D_{22} \lambda^4 (1 - d_{22} \Gamma_c) + \frac{8C_{22}}{\pi^2 R^2} (1 - c_{22} \Gamma_c) \right],$$

$$\omega_2^2 = \frac{\Gamma_s}{\rho h} \left( D_{22} d_{22} \lambda^4 + \frac{8}{\pi^2 R^2} C_{22} c_{12} \right),$$

$$X_1 = \frac{8C_{22}}{\rho h R^2} \left[ 1 - \frac{C_{22}}{4} (3\Gamma_1 - \Gamma_{2c} + 2\Gamma_{2s}) \right],$$

$$X_2 = \frac{3\pi^2 C_{22}}{16\rho h l^4} (1 - c_{22}\Gamma_c),$$

$$Y_1 = \frac{4C_{22}}{\rho h R^2} [1 - 0,5c_{22}(3\Gamma_1 - \Gamma_{2c} + 2\Gamma_{2s})],$$

$$Y_2 = \frac{3\pi^4}{16\rho h l^4} C_{22}c_{22}\Gamma_{2s},$$

$$\Gamma_1 = \int_0^{\bar{z}} \Gamma(z) dz, \quad \Gamma_{2c} = \int_0^{\bar{z}} \Gamma(z) \cos 2\rho z dz, \quad \Gamma_{2s} = \int_0^{\bar{z}} \Gamma(z) \sin 2\rho z dz.$$

По сути кривая (3.4) имеет такой же вид, что и (2.7), однако следует отметить, что наличие подчеркнутых членов нарушают «симметричность» от А относительно оси  $\rho$ .

Свободная частота упругой панели будет

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{8}{3\pi} \bar{a}_2 A + \frac{3}{4} \bar{a}_3 A^2. \quad (3.5)$$

где линейная частота

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho h} \left( D_{22} \lambda^4 + \frac{8C_{22}}{\pi^2 R^2} \right), \quad (3.6)$$

а  $\bar{a}_2$  и  $\bar{a}_3$  есть  $a_2, a_3$ , только с упругими частями в  $\bar{C}_{22}$ .

Антисимметричный случай получается совершенно аналогично: не приводятся потому, что формулы более длинные. В упругом случае частота имеет вид (3.5) и (3.6), где только  $D_{22}$  должен быть заменен на  $D_{22} - K^2_{26}/C_{66}$ .

Институт механики  
НАН Армении

Լ. Ա. ՄՈՎՍԵՅԱՆ

Անիզոտրոպ առաձգամածուցիկ շերտավոր գլանային պանելի ոչ գծային տատանումների մասին

Դիտարկվում է անիզոտրոպ շերտավոր առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթի երկրաչափորեն ոչ գծային միաչափ ստիպողական տատանումները: Շերտերը միջին մակերևույթի նկատմամբ բաշխված են երկու ձևով՝ սիմետրիկ և հակասիմետրիկ: Ինչպես սովորաբար, միջին մակերևույթի իներցիոն ուժերը արհամարվում են: Երկու տիպի եզրային պայմանների դեպքում (ազատ հենված և հողակապային ամրակցված) ստացված են ուղղանկյունային կորերի արտահայտությունները:

Որպես մասնավոր դեպք ստացված են առաձգական ազատ և ստիպողական հաճախությունների մեծությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Л. А. Мовсеян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 42, № 3, с. 37—44 (1989).

<sup>2</sup> А. С. Вольмир, Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Наука, М., 1972.

<sup>3</sup> М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. Наука, М., 1984.