ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.21

А. М. Григорян

Эффективный метод линейной фильтрации

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 10/VIII 1993)

Рассматривается метод реализации одномерной линейной фильтрации сигналов в частотной области, основанный на спаренном представлении дискретного преобразования Фурье ([1]). Показано, что предлагаемый метод позволяет выполнить фильтрацию N-точечного сигнала с помощью N умножений, против 0 (N log N) в известных алгоритмах.

Пусть $f=\{f_n\}$ и $g=(g_n)$ N-точечные последовательности, соответствующие входному и выходному сигналам линейного фильтра, передаточная функция которого Y_p, $p=0\div N-1$, известна. Предположим, что $N=2^r$, где $r\gg 1$ достаточно большое целое.

Рассмотрим уравнение линейной фильтрации в частотной области

$$G_p=Y_p\,F_p,\ p=0,\ \ldots,\ N-1, \tag{1}$$

где F_p и G_p компоненты Фурье-спектра сигналов f и g в отсчете p:

$$F_p=\sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{np},\quad G_p=\sum_{n=0}^{N-1} g_n W^{np},\quad W=\exp\,(2\pi i/N). \tag{2}$$

В силу свойства спаренного представления ([1]) составляющие F_p и G_p описываются соответствующими N/2-мерными векторами:

$$\overline{F}'_p=\mathrm{col}(f'_{p,0}\ f'_{p,1}\ ,\ldots,\ f'_{p,\,N/2-1}), \tag{3}$$

$$\overline{G}'_p=\mathrm{col}(g'_{p,0},\ g'_{p,1}\ ,\ldots,\ g'_{p,N/2-1}), \tag{4}$$

компоненты которых $f'_{p,t}=\varkappa'_{p,t}\cdot f$, $g'_{p,t}=\varkappa'_{p,t}\cdot g$, $t=0\div N/2-1$, определяются спаренными функциями $\varkappa'_{p,t}(n)=M(\cos(2\pi(np-t)/N))$, $n=0\div N-1$, где M функция, принимающая ненулевые значения только в отсчетах ± 1, в которых $M(\pm 1)=\pm 1$.

Так как ортогональное спаренное преобразование χ'_N составляют функции ([1])

$$\varkappa'_{2^n,\ 2^m t},\ t=0,\ 1\ ,\ldots,\ 2^{r-n-1}-1,\quad n=0,\ldots,\ r, \tag{5}$$

уравнение (1) достаточно описать в спаренной форме только в $r+1$ отсчетах 2^n $(n=0\div r-1)$, 0. Передаточную функцию Y_p заданного ли-

нейного фильтра в каждом таком отсчете p рассмотрим в полярном виде ($|Y_p|$, Φ_p), где $|Y_p|$ модуль комплексного значения Y_p, а $\Phi_p<2\pi$ его фаза. Обозначим через $\mathfrak{q}_p=[\Phi_p/(2pN)]$ целую часть числа $\Phi_p/(2\pi N)$, а через $\Phi(p)=\mathfrak{q}_p \bmod (N/2)$. Тогда ясно, что передаточную функцию фильтра можно представить в виде

$$Y_p \approx \hat{Y}_p = \pm |Y_p| W^{\Phi(p)}, \quad p=2^n, \ n=0,\ldots,r-1, \tag{6}$$

где знак перед модулем определяется известной функцией Хевисайда ϑ, которая принимает значения $\vartheta(x)=0$ при $x<0$ и $\vartheta(x)=1$ при $x\geqslant 0$. Другими словами, в (6) имеет место

$$\hat{Y}_p = (1-2\vartheta(\Phi(p)-N/2))|Y_p| W^{\Phi(p)}, \quad p=2^n, \ n=0,\ldots,r-1. \tag{7}$$

Таким образом, передаточную функцию Y_p фильтра мы представляем в виде ($\pm$ $|Y_p|$, $\Phi(p)$), где значения фазы Φ_p рассматриваются целыми из интервала $\{0, N/2-1\}$, т. е. фаза фильтра проквантована в нем. Ясно, что при больших значениях N (а такими можно считать $N\geqslant 1024$) нормированная фаза $\mathfrak{q}_p=[\Phi_p/(2\pi/N)]\approx\Phi_p/(2\pi/N)$. Поэтому для таких N будем предполагать, что $\mathfrak{q}_p=\Phi_p/(2\pi\Phi/N)$ и $Y_p=\hat{Y}_p$.

В спаренном представлении составляющую (1), точнее его оценку $\hat{G}_p$, в отсчете p можно записать в виде

$$\bar{G}'_p \approx \hat{\bar{G}}'_p = \pm |Y_p| T^{\Phi(p)} \bar{F}'_p, \tag{8}$$

где T—оператор циклического сдвига N/2-мерного вектора $\bar{F}'_p$ на один элемент вправо

$$T(\bar{F}'_p) = \mathrm{col}(-f'_{p,N/2-1}, f'_{p,0}, f'_{p,1},\ldots, f'_{p,N/2-2}), \tag{9}$$

а $T^{\Phi(p)}$ его $\Phi(p)$-я степень. Матрица оператора $T^{\Phi(p)}$ имеет вид

$$[T^{\Phi(p)}] = \left[\begin{array}{c|cccccccc} 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 0 & \cdot\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \Phi(p) \tag{10}$$

Так как в векторах (2), (3) для указанных отсчетов p компоненты $f'_{p,t}$, $g'_{p,t}=0$, если НОД $(p, t)\neq p$, то, отбрасывая такие неинформативные компоненты, будем рассматривать указанные векторы как L_p-мерные, где $L_p=N/(2p)$. Поэтому значения $\Phi(p)$ в (8) нужно считать равными $\Phi(p)/p$, а размеры матриц (10) равными $L_p\times L_p$.

Формула (8) указывает, как определяются все спектральные составляющие отфильтрованного сигнала по спаренному преобразованию

$$\hat{g}'_{p,t} = \begin{cases} \pm |Y_p| f'_{p,\, t+\Phi(p)}; & t+\Phi(p)<N/2p, \\ \pm |Y_p| f'_{p,\,(t+\Phi(p))\bmod(N/2)}; & t+\Phi(p)\geqslant N/2p \end{cases} \tag{11}$$

после чего для получения оценки $\hat{g}$ исходного сигнала нужно выполнить обратное ортогональное спаренное преобразование. Поэтому для $\hat{g}$ имеет место простое матричное представление:

$$\hat{g}=|(x'_N)^{-1}|\{(\bigoplus_{n=1}^{r}(\pm|Y_{2^n}\rangle\otimes[I_{2^{r-n-1}}])[T^{\Phi(2^n)}])[x'_N]f.$$

где I есть тождественное преобразование, знак $\otimes$ обозначает операцию прямого произведения матриц. Здесь, чтобы не усложнять запись матричного представления, считаем, что $|Y_{2^r}|=|Y_0|$, а $\Phi(2^r)=\Phi(0)\equiv 0$.

Из полученного матричного представления прямо следует, что для реализации описанной фильтрации нужно выполнить:

—N вещественных умножений на r—1 модулей функции Y_p;

— N вещественных операций умножений и 4N—4 сложений, так как число операций сложений для реализации спаренных преобразований равно 2N—2 ([2]).

Таким образом, описанный метод требует выполнения 0(N) арифметических операций. Для сравнения отметим, что известный метод быстрого преобразования Фурье требует 0(rN) комплексных таких операций ([3,4]). Так как число комплексных умножений для N-точечного ДПФ равно $2^{r-1}(r-3)+2$ ([1]), то в методе Фурье нужно выполнить $2[2^{r-1}(r-3)+2]+2^r$ комплексных умножений и почти столько же сложений. Поэтому предлагаемый метод требует выполнения арифметических операций почти в 3/2r раза меньше, чем в методе Фурье.

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН Армении

Ա. Մ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Գծային ֆիլտրացիայի էֆեկտիվ մեթոդ

Դիտարկվում է հաճախականությունների տարածքում գծային ֆիլտրացիայի էֆեկտիվ մեթոդ, որը հիմնված է Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության կույգված ներկայացման վրա։

Զույգված միաչափ ձևափոխությունների օգտագործմամբ ստացված է այնպիսի գծային ֆիլտրացիայի մատրիցային հավասարում, որի հիմքի վրա կարելի է կատարել մեծ երկարության ազդանշանների գծային ֆիլտրացիա, օգտագործելով՝

— N իրական բազմապատկումներ ֆիլտրի տրված փոխանցումային ֆունկցիայի r-1 մոդուլներում։

— N իրական բազմապատկումներ և 4N-4 գումարներ։

Ցույց է տրված, որ առաջարկված մեթոդը կրճատում է թվաբանական գործողությունների քանակը մոտավորապես 1,5logN անգամ համեմատած հայտնի Ֆուրյեի արագ ձևափոխության մեթոդի հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **А. М. Григорян**, Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, т. 31, № 5, с. 47—52 (1988). [2] **А. М. Григорян**, Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, т. 34, № 8, с. 100—103 (1991). [3] **N. Ahmed, K. K. Rao**, Ortogonal Transforms for Digital Signal Processing, N. Y., Springer—Verlag, 1975 [4] **D. E. Dudgeon, R. M. Mercereaw**, Multidimensional Digital Signal Processing, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1984.

6—116