

МАТЕМАТИКА

УДК 512.57

Ю. М. Мовсисян, В. Г. Мелконян

Сверхтождества дистрибутивных решеток

(Представлено академиком НАН Армении Р. В. Амбарцумяном 13/VII 1993)

Предварительные сведения о сверхтождествах см. в (1,2). Рангом сверхтождества $\pi = \omega$ назовем мощность множества $|\pi| = |\omega|$. Через $H(L_D)$ обозначим множество всех сверхтождеств многообразия дистрибутивных решеток L_D . Через $H^n(L_D)$ обозначим множество тех сверхтождеств L_D , ранг которых $\leq n$. Цель настоящей работы — найти базисы сверхтождеств для $H^n(L_D)$ ($n \in \mathbb{N}$) и $H(L_D)$. Для решения этих задач используется понятие J^n -нормального Т-слова. Будем писать $M \subseteq 2^I$, если M является J -замкнутой системой подмножеств множества I ((3), с. 79)*.

1. Заметим, что в многообразии L_D выполняются следующие сверхтождества ранга 1:

$$F(x, x) = x, \quad (id)$$

$$F(x, y) = F(y, x), \quad (com)$$

$$F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z). \quad (ass)$$

Очевидно, что с помощью этих сверхтождеств любое Т-слово π ранга 1, где $|\pi| = \{x_1, \dots, x_m\}$, $T = \{2\}$, $|\pi| = \{F\}$, можно привести к следующему виду:

$$\pi' = F(x_1, F(x_2, \dots, F(x_{m-1}, x_m) \dots))$$

который в дальнейшем обозначается через $F\{x_i\}_{x_i \in |\pi|}$. Таким образом**

$(id), (com), (ass) \vdash \pi = \pi'$. С другой стороны ясно, что $L_D \models \pi = \omega \Rightarrow |\pi| = |\omega|$. Исходя из этих двух фактов, получаем следующий базис сверхтождеств для $H^1(L_D)$:

$$\{(id), (com), (ass)\}.$$

2. Дадим определения J^n -замкнутой системы и J^n -нормальной системы.

* В работе (3) находится базис для сверхтождеств с бинарными функциональными переменными, выполняющихся в полномочных алгебрах решеток.

** Знаки $\vdash$ и $\models$ означают выводимость (следствие) и выполнимость соответственно.

2.1. J^n -замкнутая система подмножеств конечного множества I , обозначаемая через $J_n(I)$, определяется следующим образом.

$J_n(I)$ состоит из нулевой компоненты $N^0_1 \subseteq 2^I$ и из m -компонент — $N^{i_1, \dots, i_m}_{A_1, \dots, A_m}$ для любого $m \in \overline{1, n-2}$, которые определяются индуктивно:

а) для любого $A_1 \in N^0_1$ и для любого $i_1 \in \overline{1, n-1}$, существует единственная 1-компонента $N^{i_1}_{A_1} \subseteq 2^{A_1}$;

б) если уже даны все g -компоненты для $g \leq m-1$, то для любых $N^{i_1, \dots, i_{m-1}}_{A_1, \dots, A_{m-1}}$, $A_m \in N^{i_1, \dots, i_{m-1}}_{A_1, \dots, A_{m-1}}$ и $i_m \in \overline{1, n-m}$ существует един-

ственная m -компонента $N^{i_1, \dots, i_{m-1}, i_m}_{A_1, \dots, A_{m-1}, A_m} \subseteq 2^{A_m}$.

Кратко можно писать:

$$J_n(I) = \left\{ N^0_1, N^{i_1, \dots, i_m}_{A_1, \dots, A_m} \mid \begin{array}{l} 1 \leq m \leq n-2, \quad A_1 \in N^0_1 \quad (t \in \overline{1, m}) \\ 1 \leq i_t \leq n-t, \quad A_s \in N^{i_1, \dots, i_{s-1}}_{A_1, \dots, A_{s-1}} \quad (s \in \overline{2, m}) \end{array} \right\}.$$

J^2 -замкнутая система состоит только из нулевой компоненты:

$$J_2(I) = \{N^0_1\}.$$

2.2. Пусть $J_n(I)$ — некоторая J^n -замкнутая система. Зафиксируем любые $A_1 \in N^0_1$ и $i_1 \in \overline{1, n-1}$ и рассмотрим все те компоненты $J_n(I)$, нижним и верхним первыми индексами которых являются соответственно A_1 и i_1 . Легко заметить, что их совокупность представляет J^{n-1} -замкнутую систему подмножеств A_1 . Обозначим эту систему через $J^{(A_1, i_1)}_{n-1}(A_1)$ и назовем J^{n-1} -замкнутой подсистемой $J_n(I)$. Количество таких подсистем для любой $J_n(I)$ будет $|N^0_1| \times (n-1)$.

2.3. Из определения J^n -замкнутой системы вытекает, что в любой $J_n(I)$ содержится компонента $N^{i_1, \dots, i_m}_{A_1, \dots, A_m}$ для любых $A \in N^0_1$, $m \in \overline{1, n-2}$ и $i_t \in \overline{1, n-t}$ ($t \in \overline{1, m}$). Эту компоненту кратко будем обозначать через $(i_1, \dots, i_m)_A$.

2.4. Скажем, что компонента $(i_1, \dots, i_m)_A$ J^n -замкнутой системы $J_n(I)$ имеет $\{1, n-m\}$ -формулу, если для любого $t \in \overline{1, m}$ либо $i_t = 1$, либо $i_t = n-m$. Каждой компоненте $(j_1, \dots, j_m)_A$ соответствует некоторая компонента $(i_1, \dots, i_m)_A$, имеющая $\{1, n-m\}$ -форму. Это соответствие определяется с помощью индукции следующим образом:

- 1) $i_m = 1$, если $j_m < n-m$,
 $i_m = n-m$, если $j_m = n-m$;

2) допустим, что значения для $i_{t+1}, \dots, i_m$ уже определены, определим значение i_t по правилу:

$$i_t = 1, \text{ если } j_t < n-m,$$

$$i_t = n-m, \text{ если } j_t = n-m,$$

$$i_t = i_{t, n+1-j_t}, \text{ если } j_t > n-m.$$

Корректность определения в третьем случае вытекает из того, что

$$\begin{aligned} j_i \leq n-t &\Rightarrow n+1-j_i \geq t+1, \\ j_i > n-m &\Rightarrow n+1-j_i < m+1, \text{ т. е. } t+1 \leq n+1-j_i < m. \end{aligned}$$

Из этого построения следует, что $(i_1, \dots, i_m)_A$ определяется единственным образом. Эта компонента называется $\{1, n-m\}$ -формой для $(j_1, \dots, j_m)_A$ и обозначается через $(j_1, \dots, j_m)_A | \{1, n-m\}$. Ясно, что $\{1, n-m\}$ -форма не зависит от выбора $A \in N^{\circ}_1$.

2.5 Пусть $A \subseteq B$; $\alpha \subseteq 2^A$, $\alpha \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \alpha$;

$$\beta \subseteq 2^B, \beta \neq \emptyset, \emptyset \notin \beta.$$

1) Скажем, что α является $\odot$ -редактом β на A и обозначим $\alpha = \beta | \odot_A$, если $\alpha = \{K = K^* \cap A \mid K^* \in \beta\}$.

2) Скажем, что α является $\oplus$ -редактом β на A и обозначим $\alpha = \beta | \oplus_A$, если $\alpha = \beta \cap 2^A$.

2.6 J^n -замкнутая система $J_n(I)$ называется J^n -нормальной системой подмножеств I , если она удовлетворяет следующим условиям:

а) для любых $A \in N^{\circ}_1$, $m \in I$, $n-2$ и $i_1 \in I$, $n-t$ ($t \in I$, m) имеет место равенство $(i_1, \dots, i_m)_A = (i_1, \dots, i_m)_A | \{1, n-m\}$;

б) для любого $A \in N^{\circ}_1$ и для любых компонент $(i_1, i_2, \dots, i_m)_A$, $(n-m, i_2, \dots, i_m)_A$, имеющих $\{1, n-m\}$ -форму, имеет место включение

$$(i_1, i_2, \dots, i_m)_A \subseteq (n-m, i_2, \dots, i_m)_A;$$

в) для любого $A \in N^{\circ}_1$ и для любого $(i_1, \dots, i_m)_A$, имеющего $\{1, n-m\}$ -форму, имеет место равенство

$$(i_1, \dots, i_m)_A = \begin{cases} (i_1, \dots, i_m)_A | \odot_A, & \text{если } i_1 = 1, \\ (i_1, \dots, i_m)_A | \oplus_A, & \text{если } i_1 = n-m. \end{cases}$$

3. Понятие J^n -замкнутого Т-слова ($n \geq 2$) определяется индукцией по n .

3.1. $n=2$. Для любой J^2 -замкнутой системы $J_2(I) = \{N^{\circ}_1\}$ и для любой упорядоченной пары функциональных переменных (F_2, F_1) следующее Т-слово ранга 2

$$f_{J_2(I)}(F_2, F_1, x_j | j \in I) = F_2 \left\{ F_1(x_j) \mid \begin{matrix} A \in N^{\circ}_1 \\ i \in A \end{matrix} \right\}$$

называется J^2 -замкнутым Т-словом, соответствующим $J_2(I)$ и (F_2, F_1) . Допустим, для $k \leq n-1$ уже определено J^k -замкнутое Т-слово, соответствующее любым $J_k(I)$ и $(F_k, \dots, F_1)$, определим его для $k=n$. Пусть $J_n(I)$ -любая J^n -замкнутая система, $J_{n-1}^{(A)}(A)$, $A \in N^{\circ}_1$, $i \in I$, $n-1$ — ее J_{n-1} -замкнутые подсистемы, а $(F_n, F_{n-1}, \dots, F_1)$ — любой n -вектор функциональных переменных. Тогда следующее Т-слово ранга n

$$f_{J_n(I)}(F_n, \dots, F_1, x_j | j \in I) = F_n \left\{ F_n \left\{ F_{n-1} \left\{ \dots \left\{ F_1(x_j) \mid \begin{matrix} A \in N^{\circ}_1 \\ i \in A \end{matrix} \right\} \right\} \right\} \right\} \quad (*)$$

называется J^n -замкнутым Т-словом, соответствующим $J_n(I)$ и $(F_n, \dots, F_1)$.

Замечание. В этом определении не учитывается расположение $A \in N^{\circ}_1$ в Т-слове (*). Однако ясно, что Т-слова, имеющие различные расположения $A \in N^{\circ}_1$, получаются друг от друга с помощью

сверхтождеств (com) и (ass). Поэтому будем считать, что каждой $J_n(I)$ и $(F_n, \dots, F_1)$ соответствует единственное J^n -замкнутое Т-слово (с точностью сверхтождеств (com) и (ass)).

3.2. J^n -замкнутое Т-слово, соответствующее $J_n(I)$ и $(F_n, \dots, F_1)$, называется J^n -нормальным Т-словом, если $J_n(I)$ является J^n -нормальной системой.

3.3 В многообразии L_D , очевидно, выполняется сверхтождество дистрибутивности ранга 2:

$$(F_1(x, F_2(y, z))) = F_2(F_1(x, y), F_1(x, z)) \quad (\text{dis})$$

При доказательстве основного результата часто применяются следующие два сверхтождества L_D :

$$F_2(F_1(y, z), F_2(x, F_1(x, y))) = F_2(F_1(y, z), x),$$

$$F_2(x, F_2(y, F_1(x, y))) = F_2(x, y).$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. 1) Для любого Т-слова π ранга $n \geq 2$ (где $T = \{2\}$) существует, причем единственное, J^n -нормальное Т-слово π' такое, что $(\text{id}), (\text{com}), (\text{ass}), (\text{dis}) \vdash \pi = \pi'$.

2) Для любого сверхтождества $\pi = \omega \in H^n(L_D)$

$$(\text{id}), (\text{ass}), (\text{com}), (\text{dis}) \vdash \pi = \omega.$$

В качестве следствия из второй части теоремы получаем одинаковый базис $\{(\text{id}), (\text{com}), (\text{ass}), (\text{dis})\}$ для $H^n(L_D)$ и $H(L_D)$, где $n \geq 2$.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Վ. Գ. ՄԵԼԵՈՆՅԱՆ

Բաշխման կապարների գերնույնությունները

Աշխատանքը նվիրված է բաշխական կապարների գերնույնությունների նկարագրությանը: Հիմնական արդյունքը ստանալու համար ներմուծվում են J^n -փակ և J^n -կանոնավոր համակարգերի և բառերի գաղափարները: Ապացուցվում է, որ երկտեղ ֆունկցիոնալ փոփոխականների յուրաքանչյուր բառ վերջավոր թվով գերնույնությունների օգնությամբ կարելի է բերել J^n -կանոնական տեսքի: Արդյունքում ստացվում է գերնույնությունների վերջավոր բազիս բաշխական կապարների (բազմաձևության) համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд. Ереванского ун-та, 1986. ² Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Изд. Ереванского ун-та, 1990. ³ Г. Биркгоф, Теория решеток, М., Наука, 1984. ⁴ R. Padmanabhan, P. Penner, Subdirectly irreducible n-quasilattices.