ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

В. Г. Микаелян

О тождествах конечных расширений групп и расширений конечных групп

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 17/II 1994)

Содержательность теории, полученной при изучении групп с точки зрения тождеств, которые в них выполняются, наводит на мысль о целесообразности изучения важной операции расширения групп с помощью тождеств произведения многообразий, порожденных верхней и нижней группами расширения (все определения и обозначения см. в ([1])). Такой подход применяется, например, при доказательстве существования конечного базиса тождеств группы, являющейся расширением группы H посредством G, где H—нильпотентная, метабелева и т. д. группа, а G имеет конечный базис тождеств (см. [2,3]). Однако указанная выше связь не всегда достаточно тесна—можно привести примеры случаев, когда для некоторых групп H и G все расширения группы H посредством G удовлетворяют некоторому тождеству, которое, однако, нарушается в произведении $V \cdot U$, где $V = \mathrm{Var}\, H$, $U = \mathrm{Var}\, G$ (см. ([1])), т. е. которое не лежит в $\mathbf{V}(\mathbf{U})$, где $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$—вербальные подгруппы, соответствующие многообразиям V и U. Приведем сначала теоремы, каждая из которых позволяет построить обширный класс таких примеров.

Теорема 1. Пусть H есть любая конечная не нильпотентная группа. Тогда для любой неединичной группы G с нетривиальным тождеством любое расширение группы H посредством G имеет тождество, не лежащее в $\mathbf{V}(\mathbf{U})$ (т. е. всевозможными подстановками тождеств из U в V).

Теорема 2. Пусть H есть любая конечная неединичная группа, G—любая неабелева группа с нетривиальным тождеством. Тогда любое расширение группы H посредством G имеет тождество, не лежащее в $\mathbf{V}(\mathbf{U})$. Причем в этом случае мы можем указать вид тождества $v \equiv 1$ (всех таких расширений) обладающего нужным свойством. Именно:

$$v \equiv [u(x_1, \ldots, x_n), (y_1 \cdot y_2^{-1})^{z_{1,2}}, (y_1 \cdot y_3^{-1})^{z_{1,3}}, \ldots, (y_{l-1} \cdot y_l^{-1})^{z_{l-1,l}}] \equiv 1, \qquad (1)$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$ есть некоторое тождество из U, l—любое число, большее, чем $|H|!$, а $x^y = y^{-1}xy$.

Теорема 3. Пусть H есть любая неединичная группа, порождающая регулярное многообразие U (т. е. ни одна U-свободная группа не вкладывается в U-свободную группу меньшего ранга). Тогда для

любой конечной неабелевой группы G расширение группы H посредством G имеет тождество, не лежащее в $\mathbf{V}(\mathbf{U})$.

Класс регулярных многообразий очень широк: регулярными являются все локально разрешимые многообразия и даже все подмногообразия произведения нескольких локально разрешимых и локально конечных многообразий.

Теорема 4. Если V—регулярное нетривиальное многообразие, и U—локально конечное неабелево многообразие, то любая конечно порожденная группа R из произведения $V \cdot U$ имеет тождество, не лежащее в $\mathbf{V}(\mathbf{U})$.

Заметим, что теорему 4 можно перефразировать так: для любых многообразий V, U (с теми же условиями) произведение $V \cdot U$ имеет бесконечный базисный ранг, т. е. не порождается своей никакой конечно порожденной группой. (Этот результат был анонсирован в ([6]) и представляет отдельный интерес, так как является значительным усилением соответствующих результатов из ([2,4]).

В работе расширения групп изучаются с помощью двух специально сконструированных видов многообразий. Приведенные выше теоремы являются следствиями двух фактов об этих конструкциях.

Определение 1. Для многообразия V и группы G через $V \circ G$ обозначается многообразие, порожденное всеми расширениями групп из V посредством группы G.

Определение 2. Для группы H и многообразия U через $H \circ U$ обозначается многообразие, порожденное всеми расширениями группы H посредством групп из U.

Построенные конструкции мы будем называть, соответственно, г-произведением (многообразия V и группы G) и l-произведением (группы H и многообразия U).

Если H, G—группы, а R есть любое расширение группы H посредством G, то очевидны включения:

$$R \in V \circ G \subseteq V \cdot U, \quad R \in H \circ U \subseteq V \cdot U \tag{2}$$

(как и раньше, $V = \mathrm{Var}\ H$, $U = \mathrm{Var}\ G$). Поэтому тождества г- и l-произведений $V \circ G$ и $H \circ U$ будут «ближе» к тождествам группы R, чем тождества $V \cdot U$ (т. е. множество слов $\mathbf{V}(\mathbf{U})$). Теоремы 1, 2 вытекают из следующего факта.

Теорема 5. Если H есть конечная группа, то для выполнения равенства $H \circ U = \mathrm{Var} H \cdot U$ (U—любое многообразие, отличное от многообразия всех групп) необходимо, чтобы:

а) U было абелевым многообразием;

б) H было нильпотентной группой;

в) экспонента многообразия U была взаимно простой с экспонентой группы H.

Теорема 6. Если V—регулярное нетривиальное многообразие, а G—любая конечная группа, то из равенства $V \circ G = V \cdot \mathrm{Var}\ G$ следует, что G есть абелева группа.

Из этой теоремы следуют теоремы 3, 4.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А. Ю. Ольшанскому за постановку задачи, многочисленные полезные обсуждения, замечания и за постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Վ. Գ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Խմբերի վերջավոր ընդլայնումների և վերջավոր խմբերի ընդլայնումների նույնությունների մասին

Աշխատանքում բերվում են երեք թեորեմներ, որոնցից յուրաքանչյուրը ներկայացնելով ինքնուրույն հետաքրքրություն, հնարավորություն է տալիս նաև կառուցելու օրինակների բավականին լայն դասեր, երբ H *և* G *խմբերի յուրաքանչյուր ընդլայնում բավարարում է ինչ-որ նույնության, որը տեղի չունի* VarR·VarG *բազմաձևության մեջ։ Արդյունքների հաջորդ շարքը նվիրված է խմբերի բազմաձևությունների հայտնի արտադրյալի հետ՝ հեղինակի կողմից մտցված երկու կոնստրուկցիաների կապի ուսումնասիրությանը։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **Х. Нейман**, Многообразия групп, Мир, М., 1969. [2] **G. Higman**, Quart. J. Math. Oxford, v. 2, № 10, p. 165—178 (1959!. [3] **И. Д. Иванюта**, Математика, т. 5, № 1, 137—144 (1969). [4] **А. Н. Красильников, А. Л. Шмелькин**, Алгебра и логика, Семинар, т. 20, № 5, 546—554 (1981). [5] **В. Г. Микаелян** ДНАН Армении, т. 94, № 5, с. 277—280 (1993). [6] **В. Г. Микаелян**, Об. тезисов III международ. конф. по алгебре. Красноярск. с. 228, 1993.