

УДК 517.968:519.63.64

Член-корреспондент ИАН Армении А. Б. Персеян, Г. М. Атия

### Решение интегральных уравнений теории потенциала

(Представлено 23/XII 1992)

1. Как известно <sup>(1)</sup>, решение классических краевых задач для уравнения Лапласа и некоторых других уравнений эллиптического типа <sup>(2)</sup> сводится к решению интегральных уравнений второго рода на границе области.

В частности, если область  $D \subset R^2$  имеет гладкую спрямляемую границу  $\Gamma = \partial D$ , определяемую параметрическим уравнением

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq l < +\infty, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (1)$$

то интегральное уравнение

$$\pi \rho(s) + \int_0^1 K(s, t) \rho(t) dt = f(s), \quad s \in [0, 1], \quad (2)$$

соответствующее внутренней задаче Дирихле  $\Delta u = 0$ ,  $u|_{\Gamma} = f(s)$ , имеет ядро

$$K(x, t) = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad s, t \in [0, 1], \quad (3)$$

где  $r^2 = (x(s) - x(t))^2 + (y(s) - y(t))^2$  и  $\varphi$  — угол между внешней нормалью и к  $\Gamma$  и вектором  $\vec{r}(x(s) - x(t), y(s) - y(t))$  в точке  $(x(t), y(t))$ . Если в этой точке кривизна  $\kappa(t)$  конечна, то  $K(s, t) \rightarrow -\frac{1}{2} \kappa(t)$

при  $t \rightarrow s$ .

Сопряженное ядро  $K^* = K(t, s)$  соответствует интегральному уравнению для внешней задачи Неймана  $\Delta u = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = f(s)$ ,  $u(x, y) \rightarrow 0$ ,  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

2. В случае, когда граница  $\Gamma$  достаточно гладкая, решение уравнения (2) с ядром  $K$  и  $K^*$  не представляет труда. Так, если  $x(s), y(s) \in C^{m-2}[0, 1]$  ( $m \geq 3$ ), то применение квадратурной формулы трапеций на равномерной сети к интегралу в (2) гарантирует точность решения порядка  $O(h^{m-2})$ ,  $h \rightarrow 0$ , где  $h$  — шаг сети дискретизации.

Следует отметить, что решение краевых задач упомянутым методом потенциала обладает и тем преимуществом перед другими методами, что позволяет вычислять потенциал  $u(x, y)$  или его градиент только в интересующих нас частях области  $D$  или ее границы  $\Gamma$ , что значительно экономит вычислительные ресурсы.

Однако ситуация резко осложняется при нарушении гладкости границы  $\Gamma$ . В этом случае ядро (3) может быть не ограничено и классические квадратурные формулы в значительной степени теряют свою эффективность. Естественным образом возникает проблема разработки эффективных методов решения уравнения (2) с ядром  $K$  или  $K^*$  (и, в конечном счете, задач Дирихле и Неймана) в случае негладкой границы  $\Gamma$ .

Ниже рассматривается случай кусочно-гладкой спрямляемой границы  $\Gamma$  с изломами под прямым углом. Существование и единственность решения интегральных уравнений теории потенциала для внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в этом случае обеспечены (1).

Изучены интегральные операторы с ядрами  $K$  и  $K^*$ , разработаны методы решения тестовых уравнений, приведены результаты численного эксперимента на персональном компьютере IBM PC/AT—286.

3. Рассмотрим следующие модельные интегральные операторы

$$K_1 \varphi = x \int_0^1 \frac{K_1(x, t)}{x^2 + t^2} \varphi(t) dt \quad (4)$$

$$K_2 \varphi = \int_0^1 \frac{tK_2(x, t)}{x^2 + t^2} \varphi(t) dt, \quad (5)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — гладкие функции,  $0 \leq x \leq 1$ . Заметим, что при  $K_1(t, x) = K_2(x, t)$ ,  $K_2 = K_1^*$ .

Ядра этих операторов неограничены в окрестности точки  $(x, t) = (0, 0)$  и сингулярность эта следующим образом связана с уравнением (2).

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_{p-1} < l_p = 1$  и функции в (1) кусочно-гладкие  $x(s), y(s) \in C_m[s_k, s_{k+1}]$ ,  $k=0, 1, \dots, p-1$ ,  $m \geq 2$ , а в точках  $(x(s_k), y(s_k))$  ( $k=0, 1, \dots, p-1$ ) кривая  $\gamma$  изломана под прямым углом.

Тогда (см. (3)) при  $\xi = s - s_k \rightarrow 0$ ,  $\eta = t - s_k \rightarrow 0$ ,  $s, t \in [s_k, s_{k+1}]$ ,  $k=0, 1, \dots, p-1$

$$K(s, t) = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + O\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (6)$$

Действие операторов  $K_1$  и  $K_2$  характеризуется следующим образом

**Т е о р е м а 2.** Если ядра  $K_1(x, t)$  в (4), (5) непрерывны в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  и  $K_1(0, 0) \neq 0$ , то операторы  $K_i$  не ограничены в  $L_p(0, 1)$  ( $1 < p < +\infty$ ). При этом оператор  $K_1$  ограничен в  $L_\infty$  (и  $C[0, 1]$ ), а  $K_2$  — в  $L_1$ .

4. Несмотря на очевидную связь между уравнениями

$$y(x) = K_i y + f(x), \quad x \in [0, 1], \quad i=1, 2, \quad (7)$$

вычислительные проблемы, возникающие при их решении, сильно отличаются.

Одинаковым является лишь то обстоятельство, что при  $K_1(0,0) \neq 0$  ( $i=1, 2$ ) применение к интегралам в (4) и (5) классических квадратурных формул для гладкой функции  $\varphi(x)$  в окрестности точки  $(x, t) = (0,0)$  приводит к ошибке, независящей от густоты сети дискретизации.

Действительно, пусть, например, применяется правило средней точки на равномерной сети  $x_k = (2k+1)/2N$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ), соответствующей дроблению отрезка  $[0,1] = \bigcup_k \left[ \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$ . Тогда при  $\varphi(x) = 1$  и  $h = 1/N$

$$\arctg \frac{h}{x} = x \int_0^h \frac{dx}{x^2 + t^2} = \frac{xh}{x^2 + (h/2)^2} + r(x). \quad (8)$$

В точке  $x = x_0 = h/2$  ошибка  $r$  не зависит от  $h$  ( $r(h/2) = -1.195$ ).

Нетрудно убедиться, что такая же ситуация и в отношении ядра соответствующего сопряженного оператора  $K^*$ . Точность увеличивается ( $h \rightarrow 0$ ) лишь при  $x^2 + t^2 \geq x = \text{const} > 0$ . В результате этого (что подтверждается многочисленными экспериментами) решение уравнения (7) сведением к алгебраической системе, при применении классических квадратурных формул, приводит к крайне медленному уменьшению среднеквадратичной ошибки в зависимости от уменьшения максимального отрезка дробления интервала  $(0,1)$ .

5. При разработке эффективных методов численного решения уравнений (7) нами применялись следующие подходы:

а) разбиение отрезка  $[0,1]$  точками

$$t_k = \left( \frac{k}{N} \right)^\beta, \quad \beta > 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (9)$$

которые при  $\beta > 1$  сгущаются к нулю, а при  $\beta < 1$  — к единице (при  $\beta = 1$  имеем равномерное разбиение);

б) комбинированное применение классических квадратурных формул на отрезках  $[t_k, t_{k+1}]$  при  $k \geq q > 1$  и весовых квадратурных формул при  $0 \leq k \leq q$  (в случае (4) вес имеет вид  $\frac{x^2}{x^2 + t^2}$ , а в случае (5)

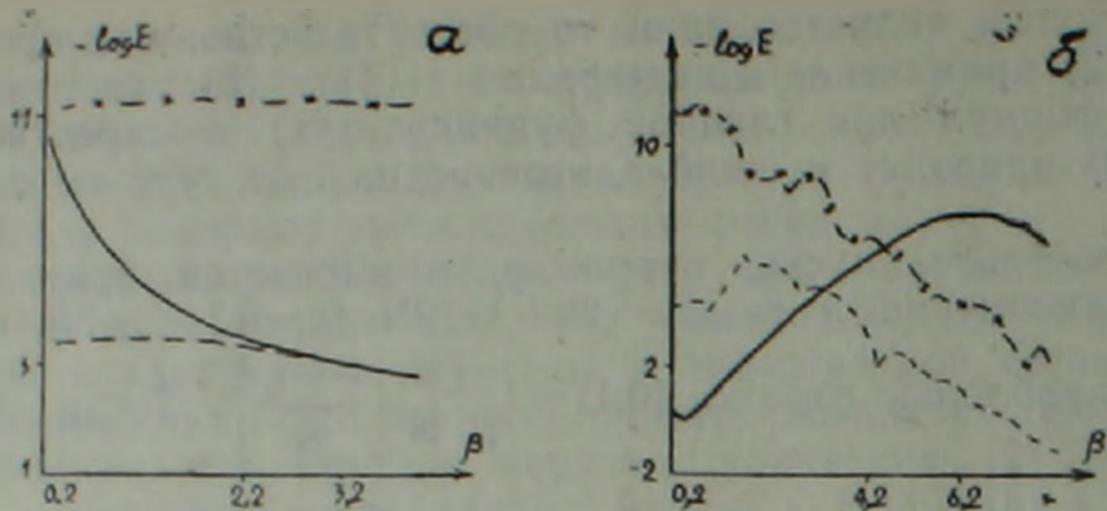
$$-\frac{t}{x^2 + t^2}).$$

Решение многочисленных тестовых уравнений позволило выбрать практически оптимальное сочетание параметров  $\beta$  и  $q$ . Типичные результаты приведены на рисунке, а и б, относящихся соответственно к решению уравнения (4) при  $K_1(x, t) = 0,7$  и  $f(x) = 1 + 0,7 \arctg(1/x)$  (точное решение —  $y \equiv 1$ ) и уравнения (5) при  $K_2(x, t) = 1$  и  $f(x) = x - 1 + \arctg(1/x)$  (точное решение —  $y(x) \equiv x$ ).

Отметим, что при применении весовой формулы Pг2 для всех  $k$  ( $= 0, 1, \dots, 16$ ) (т. е. когда в б)  $q = 16$ ) счет на персональном компьютере IBM PC/AT—286 занял 18 сек. G3— и G3+Pг3,— алгоритмы работали 14 сек, а Pг2—8 сек (см. подпись к рисунку).

На основе этого и ряда других численных экспериментов приходим к следующему выводу:

1) Для решения уравнения (7) при  $i=1$  практически оптимальным является применение подхода б) с  $1 \leq q \leq N$  и  $\beta < 1$ . При  $q=1$  удобно брать  $\beta \approx 0,2$  (рисунок, а).



Среднеквадратичная ошибка  $E$  решения уравнения (7) при  $N=16$ , в зависимости от неравномерности сети (8). (а соответствует случаю  $i=1$ ; б  $i=2$ ). G3 (пунктирная линия) — алгоритм на основе трехточечной формулы Гаусса. G3+Pr3 (жирная линия) — подход б) с  $q=1$  при применении трехточечной весовой формулы Pr3 на Гауссовой сети. Pr2 (пунктирная линия со звездочками) — применение двухточечной весовой формулы на Гауссовой сети.

2) Для решения уравнения (7) при  $i=2$  оптимальным является применение подхода б) на равномерной сети ( $\beta=1$ ) при  $q/N \geq 1/4$ . На рисунке, б  $q=N$  в алгоритме Pr2.

6. При решении внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана для областей с изломанной границей методом потенциала (см. выше п.1) уравнение (2) для плотности потенциала  $p(s)$  сводится к системе интегральных уравнений относительно вектор-функции  $u(s) = (p_1(s), \dots, p_p(s))$ , где  $p_k(s) = p(s)$  при  $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ . В частности (см. теорему 1), если граница  $\Gamma$  изломана под прямыми углами, сингулярности матрицы, — ядра этой системы, имеют именно вид (4) и (5).

Таким образом, рекомендации п. 5 представляются эффективными при решении упомянутых граничных задач.

Несмотря на то, что при численном решении задач Дирихле и Неймана методом потенциала решение уравнения (7) является лишь одним из этапов, численный эксперимент полностью подтвердил эффективность разработанного подхода.

В заключение отметим, что разнообразные методы позволяют с высокой точностью решать ряд задач математической физики. К ним, в частности, относится классическая задача кручения сплошного цилиндрического тела с поперечным сечением в виде односвязной области <sup>(1)</sup>, а также линеаризованная задача колебаний упругого изотропного идеально проводящего тела во внешнем магнитном поле <sup>(3)</sup>.

Институт математики НАН Армении  
Мансурский государственный университет  
(г. Эль-Мансура, АРЕ)

Հայաստանի ԳԱԱ բոլորակից անդամ՝ Լ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ, Գ. Մ. ԱՏԻՅԱ

Պոստեցիալի տեսության ինտեգրալ հավասարումների լուծում

Աշխատանքում մշակված լապլասի հավասարման համար Դիրիխլեի և Նեյմանի խնդիրների լուծման եղանակի Եղանակի հիմքում ընկած է խնդիրների բերումը ինտեգրալ հավասարումների ծույց է տրված, որ երբ տիրույթի

եզրագիծը ունի կոտրվածքներ ուղիղ անկյան տակ, հավասարման կորիզը ունի որոշակի եզակիություն:

Առաջարկված է մոտավոր լուծման ալգորիթմ, որի էֆեկտիվությունը բացահայտված է թվային փորձարկման միջոցով:

#### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., «Наука», 1966. <sup>2</sup> В. Д. Купрадзе, Мат. сб., т 41, № 4, с.561—574. (1934). <sup>3</sup> С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М., Наука, 1977.