ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Н. С. Мелкумян

Об антиплоском вдавливании двух жестких штампов в упругую полуплоскость с полубесконечным вертикальным разрезом

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Б. Л. Абрамяном 7/VII 1992)

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругого изотропного полупространства $(x\geqslant 0)$ с полубесконечным вертикальным разрезом $(a<x<\infty)$. На конечных участках горизонтальной границы полупространства прикреплены два штампа конечных размеров $(b\leqslant y\leqslant c)$, симметрично расположенные относительно оси разреза.

Принимается, что на штампы на границе полупространства и на берегах разреза действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации.

Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрат $(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$ с смешанными граничными условиями.

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система «парных» и «тройных» интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

По известным формулам можно определить напряжения вне разреза и перемещения берегов разреза. Выделена особенность и вычислен коэффициент интенсивности напряжений в начале разреза.

При приравнивании значения коэффициента интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого разрушения материала получается выражение, которое определяет распространение разреза и его устойчивость.

В частном случае, когда длина разреза стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полупространства без разреза. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде.

В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадранта, при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\tau_{zx}(0,y)=0, && 0<y<b,\ c<y<\infty \\ &u_z(0,y)=\delta && b<y<c \\ &\tau_{zy}(x,0)=f_z(x), && a<x<\infty \end{aligned} \qquad (1)$$

и условие кососимметрии

$$u_z(x,0)=0, \qquad 0<x<a \tag{2}$$

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье

$$u_z(x,y)=\int_0^\infty A(\alpha)e^{-\alpha x}\sin\alpha y\,d\alpha+\int_0^\infty C(\beta)e^{-\beta y}\cos\beta x\,d\beta.$$

Тогда для касательных напряжений имеются:

$$\tau_{zx}=-G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)e^{-\alpha x}\sin\alpha y\,d\alpha-G\int_0^\infty \beta C(\beta)e^{-\beta y}\sin\beta x\,d\beta;$$

$$\tau_{zy}=G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)e^{-\alpha x}\cos\alpha y\,d\alpha-G\int_0^\infty \beta C(\beta)e^{-\beta y}\cos\beta x\,d\beta. \tag{3}$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1) и (2). Удовлетворив граничным условиям (1) и (2), получается следующая система «тройных» и «парных» интегральных уравнений:

$$\begin{cases} -G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\sin\alpha y\,d\alpha=0, & 0<y<b \\ \int_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha y\,d\alpha=\delta-\int_0^\infty C(\beta)e^{-\beta y}\,d\beta, & b<y<c \\ -G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\sin\alpha y\,d\alpha=0, & c<y<\infty \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty C(\beta)\cos\beta x\,d\beta=0, & 0<x<a \\ \int_0^\infty \beta C(\beta)\cos\beta x\,d\beta=-\frac{1}{G}f_1(x)+\int_0^\infty \alpha A(\alpha)e^{-\alpha x}\,d\alpha, & a<x<\infty \end{cases} \tag{5}$$

«Парные» интегральные уравнения, подобные (5), рассматривались в работах ([2,3]) и др. Используя результаты работы ([2]), для функции $C(\beta)$ получается следующее выражение из (5):

$$C(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_a^\infty \varphi_1(r)J_1(\beta r)\,dr-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\,d\alpha\int_a^\infty rK_1(\alpha r)J_1(\beta r)\,dr, \tag{6}$$

где: $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом; $K_\nu(z)$ — функция Макдональда;

$$\varphi_1(r)=\frac{1}{G}\int_r^\infty \frac{xf_1(x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}},$$

«Тройные» интегральные уравнения, подобные (4), рассматривались в работе ([4]) и др. Используя результаты работы ([4]), из (4) получаем:

$$A^*(\alpha)=\alpha A(\alpha); \tag{7}$$

$$A^*(\alpha)=\sum_{n=1}^\infty A_n^* J_{2n-1}(c\alpha); \tag{8}$$

$$A_n = (-1)^{n+1} A_n^*; \tag{9}$$

$$A_n = 2\xi(0)\sin\frac{\lambda}{2} + 4n(1-n)\sin^3\frac{\lambda}{2}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^1 s\xi(s)F\left(n+1,\ -n;\ 2;\ s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)ds; \tag{10}$$

$$\xi(s) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^s \frac{\mu\Psi'\left[2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right]}{\sqrt{s^2-\mu^2}}d\mu + Q; \tag{11}$$

$$b = c\cos\frac{\lambda}{2} \tag{12}$$

$$\Psi'\left[2\arcsin\left(\mu\sin\frac{\lambda}{2}\right)\right] = -\frac{c}{2}\mu\sin\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty \beta c(\beta)e^{-\beta c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}d\beta, \tag{13}$$

где $F(\alpha,\ \mu,\ \gamma,\ z)$ — гипергеометрический ряд:

Q — постоянная, которая должна быть найдена путем подстановки (8) и (11) во второе уравнение из (4), при $y = b$.

Путем подстановки (6) и (9) в (8), с учетом (10), (11), (12) и (13), для определения функции $A(\alpha)$ получается интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$A(\alpha) = \Omega(\alpha) + \int\limits_0^\infty A(\gamma)K(\gamma,\ \alpha)d\gamma \tag{14}$$

где

$$\Omega(\alpha) = 2Q\sin\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2n-1}(c\alpha)}{\alpha(-1)^{n+1}} +$$

$$+ 2Q\sin^3\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-n)}{(-1)^{n+1}}F\left(1+n,\ -n;\ 2;\ \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\frac{J_{2n-1}(c\alpha)}{\alpha} -$$

$$-\frac{8c}{\pi^2}\sin^4\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-n)}{(-1)^{n+1}}F\left(1+n,\ -n;\ 2;\ \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\frac{J_{2n-1}(c\alpha)}{\alpha}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty \beta d\beta\int\limits_0^s \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2-\mu^2}}e^{-\beta c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}d\mu\int\limits_a^\infty \varphi_1(r)J_1(\beta r)dr; \tag{15}$$

$$K(\gamma,\ \alpha) = \frac{8c}{\pi^2}\sin^4\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-n)}{(-1)^{n+1}}F\left(1+n,\ -n;\ 2;\ \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\frac{J_{2n-1}(c\alpha)}{\alpha}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty \beta d\beta\int\limits_0^s \frac{\mu^2}{\sqrt{s^2-\mu^2}}e^{-\beta c\sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}}d\mu\cdot\int\limits_a^\infty \gamma r K_1(\gamma r)J_1(\beta r)dr \tag{16}$$

Исходя из (4) и асимптотического разложения функций Бесселя и Макдональда для небольших α получается, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}\Omega(\alpha)=0 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |K(\gamma,\alpha)|\,d\gamma<1. \tag{17}$$

Значит, интегральное уравнение (14) можно решить методом последовательных приближений. Далее, по формуле (6) определяется искомая функция $c(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, напряжения вне разреза и перемещения берегов разреза $(y=0)$ определяются формулами:

$$\tau_{zy}(x,0)=G\int_0^\infty \alpha A(\alpha)e^{-\alpha x}d\alpha+$$

$$+\frac{2}{\pi}G\frac{\varphi_1(a)}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{2}{\pi}G\int_a^\infty\frac{[\varphi_1(r)]'dr}{\sqrt{r^2-x^2}}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{Ga}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)K_1(\alpha a)d\alpha+$$

$$+\frac{2}{\pi}G\int_0^\infty \alpha^2A(\alpha)d\alpha\int_a^\infty\frac{rK_0(\alpha r)dr}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad 0<x<a; \tag{18}$$

$$u_z(x,0)=\frac{2}{\pi}\int_a^x\frac{r\varphi_1(r)dr}{\sqrt{x^2-r^2}\left(x+\sqrt{x^2-r^2}\right)}+\frac{2}{\pi}\int_x^\infty\frac{\varphi_1(r)\cos\left(\arcsin\frac{x}{r}\right)dr}{\sqrt{r^2-x^2}}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)d\alpha\int_a^x\frac{r^2K_1(\alpha r)dr}{\sqrt{x^2-r^2}\left(x+\sqrt{x^2-r^2}\right)}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha A(\alpha)d\alpha\int_x^\infty\frac{rK_1(\alpha r)\cos\left(\arcsin\frac{x}{r}\right)dr}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad a<x<\infty. \tag{19}$$

Коэффициент особенности K_{III} имеет вид

$$K_{III}=\frac{2}{\pi}G\left\{\varphi_1(a)+\int_0^\infty \alpha A(\alpha)aK_1(\alpha a)d\alpha\right\}. \tag{20}$$

Приравнивая значение коэффициента интенсивности напряжений (20) к критической величине $(K_{III}=K_c)$ по теории хрупкого разрушения [5], получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

Институт механики НАН Армении

Ն. Ս. ՄԻԼՔՈՒՄՅԱՆ

Կիսաանվերջ ուղղահայաց ճեղքով առաձգական կիսահարթության վրա երկու կոշտ դրոշմների հակահարթ ճնշման մասին

Դիտարկվում է հակահարթ կոնտակտային խնդիր կիսաանվերջ ճեղքով, առաձգական, իզոտրոպ կիսատարածության համար։ Կիսատարածության հորիզոնական սահմանի եզրային տեղամասերում, ճեղքի առանցքի նկատմամբ համաչափ ամրակցված են վերջավոր չափերի երկու դրոշմներ։ Ընդունվում է, որ դրոշմների, կիսատարածության սահմանի և ճաքի ափերի վրա ազդում են հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակի հանգեցնող ուժեր։ Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով տեղափոխություններով։ Եզրային պայմանների հակասիմետրիայի շնորհիվ բավական է դիտարկել միայն խառը եզրային պայմաններով քառորդ հարթությունը։

Խնդրի լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով։ Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաները որոշելու համար ստացվել է «զույգ» և «եռյակ» ինտեգրալ հավասարումների համակարգ։ Այդ համակարգն իր հերթին բերվում է Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման։ Ապացուցված է այդ հավասարման լուծելիությունը, մասնավորապես, լուծումը կարող է գտնվել հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **В. Новацкий.** Теория упругости. М., Мир, 1975. [2] **В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян.** ДАН АрмССР, т. 51, № 3 (1970). [3] **Я. С. Уфлянд.** Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., Наука, 1977. [4] **В. С. Тоноян.** ДАН АрмССР, т. 37, № 3 (1963). [5] **П. П. Черепанов.** Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974.