ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 1

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.58

С. В. Шахвердян, А. С. Шахвердян

Необходимые условия оптимальности для систем с ограничениями на полное изменение управления

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. А. Терзяном 27/IX 1993)

Задачи оптимального управления системами с ограничениями на полное изменение скалярного и векторного управления часто встречаются в приложениях, в особенности в ситуациях, когда решение имеет вид скользящих режимов.

Обычно задачи со скользящими режимами решаются путем стандартного дифференциального включения скорости фазовой точки в выпуклую оболочку множества скоростей с последующим переносом меры на временную ось ([1,2]). В результате непрерывная задача заменяется дискретной, для которой понятия «скользящие режимы» не существует. Однако известно, что если непрерывная задача принадлежит к классу задач со скользящими режимами, то для дискретного ее аналога обычный принцип максимума не справедлив ([3,4]). Поэтому для задач со скользящими режимами вообще и при наличии ограничений на изменение управления в особенности необходимость построения условий оптимальности очевидна.

В данной работе получены необходимые условия оптимальности для систем с ограничениями на полное изменение скалярного и векторного управления, справедливые и для класса задач, для которых обычный принцип максимума оказывается не приемлемым.

З а д а ч а 1. Пусть объект управления описывается системой

$$\dot{x}=f(x, u),\ x(0)=x^0,\ x(T)=x^T, \tag{1}$$

где $x=[x_1, \ldots, x_n]'$—n-мерный вектор фазовых координат; $f=[f_1, \ldots, f_n]'$; $u=[u_1 \ldots, u_m]$—m-мерный управляющий вектор; x^0 и x^T—заданные векторы; T—период управления, не фиксирован; $(')$—знак транопортирования. На u наложены ограничения

$$|u_i|\leqslant a_i,\ i=\overline{1, m},\quad i\neq j\in\{1, \ldots, m\}; \tag{2}$$

$$V_0^T u_j(t)\leqslant S \tag{3}$$

Обозначим

$$\dot{u}_j=v_j=f_{n+1}(v_j), \tag{4}$$

т. е. u_j введем в разряд фазовых координат, а v_j примем за j-ю координату вектора управления.

Предположим, что $u_j(t)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную по t. Тогда полное изменение функции $u_j(t)$ можно определить так:

$$V_0^T u_j(t) = \int_0^T |v_j|\, dt \leq S. \tag{5}$$

Требуется найти $u(t)$, $0 < t < T$, которое удовлетворяет ограничениям (2), (5), переводит объект из состояния x^0 в состояние x^T и доставляет минимум функционалу

$$J = \int_0^T f_0(x,\ u)dt. \tag{6}$$

Предполагается, что функции f (x, u), f_0 (x, u) непрерывны по x и u и непрерывно дифференцируемы по x. На $u_j(t)$ стандартное ограничение типа (2) не введено ради простоты; его ввод не вносит принципиальных изменений в процесс решения задачи 1.

Неравенство (5) можно заменить равенством

$$v^T{}_0 u_j(t) - S + \beta^2 = 0, \tag{7}$$

где β—дополнительный неизвестный параметр, удовлетворяющий уравнению

$$\dot{\beta} = 0. \tag{8}$$

Благодаря таким преобразованиям задача 1 сведена к типу стандартных параметрических задач с недифференцируемым ограничением.

С помощью множителей интеграл (6) можно представить так:

$$J^* = \int_0^T \left[f_0(x,\ u) + \lambda\left(|v_j| + \frac{1}{T}\beta^2 \right)\right] dt - \lambda S,$$

где λ —постоянный во времени множитель.

Обозначим

$$\dot{x}_0 = f_0(x,\ u) + \lambda\left(|v_j| + \frac{1}{T}\beta^2 \right) = f_0(x,\ u,\ v_j,\ \beta),$$

$$x_0(0) = 0, \quad x_0(T) = J^* + \lambda S.$$

Тогда для задачи 1 гамильтониан будет иметь вид

$$H = \sum_{s=0}^{n+1} \Psi_s f_s + \Psi_{n+2} \cdot 0. \tag{9}$$

где Ψ_s, $s = \overline{0, n+2}$ являются решением системы

$$\dot{\Psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad i = \overline{0, n},\quad \dot{\Psi}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial u_j} \tag{10}$$

$$\dot{\Psi}_{n+2} = -\frac{\partial H}{\partial \beta},\quad \Psi_{n+1}(\tau) = \Psi_{n+2}(\tau) = 0,\quad \tau = 0;\ T$$

Теорема. Пусть $\bar{u}^*(t) = [u^*_1(t), \ldots, u^*_{j-1}(t), v^*_j(t), u^*_{j+1}(t), \ldots, u^*_m(t)]'$ — оптимальное управление в задаче 1, $t \in [0, T]$, $\bar{x}^* = [x^*_0, x^*,$

u^*_j, $\beta^*]'$ — соответствующее управлению $\bar u^*(t)$ решение системы (1), (4), (7), определенное на $[0, T]$. Тогда найдутся такие $\lambda \geqslant 0$ и ненулевая вектор-функция $\Psi(t)$, являющаяся решением (10), что выполняются:

$$1^0)\ H^0(\Psi^*, \bar x^*, \bar u^*) \geqslant H^0(\Psi, \bar x, \bar u),\ \forall \bar u \in U;$$

$$2^0)\ H(\Psi^*, \bar x^*, \bar u^*)|_T \geqslant 0;$$

$$3^0)\ \lambda \to \min, \quad \text{где } H^0 = H - A,\ A = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i}^{u_i} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \Psi}, \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} dy_i \right\rangle, \tag{11}$$

$$U = \{u : |u| \leqslant a,\ V_0^T u_j(t) \leqslant S\},\quad \gamma_i \in U$$

Доказательство. При доказательстве основного условия предполагается, что компоненты вектора Ψ являются функционалами от управления $\bar u(\cdot)$ и матрица функциональных производных $[\partial\Psi/\partial\bar u]$ в общем случае не нулевая. В силу этого справедливо разложение

$$H(\Psi^*, \bar x, \bar u) = H(\Psi, \bar x, \bar u) - \sum_{i=1}^{m} \int_{u_i^*}^{u_i} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \Psi}, \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} dy_i \right\rangle. \tag{12}$$

Учитывая (12) и используя стандартные схемы доказательства обычного принципа максимума, после несложных преобразований можно получить первое условие в (11) ([4]).

Доказательство условия 2° аналогично известным схемам для стандартных задач оптимального управления ([5]). Условие 3° будет доказано в ходе анализа полученных результатов.

Из условия 1° следует, что на оптимальном процессе $\{\bar u^*, \bar x^*\}$ максимума достигает функция H^0, которая в силу своей конструкции может быть названа неполным гамильтонианом.

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial H^0}{\partial \bar u} = \frac{\partial H}{\partial \bar u}. \tag{13}$$

Следовательно, решение, полученное из уравнения $\partial H^0/\partial\bar u = 0$, будет совпадать с решением $\partial H/\partial\bar u = 0$, причем $\partial H/\partial u$ построено при фиксированном Ψ.

Так как задача параметрическая, то $\Psi_{n+2}(0) = \Psi_{n+2}(T) = 0$, и из (6) имеем

$$\Psi_{n+2} = -\int_0^t \frac{\partial H}{\partial \beta} dt = -2\lambda\beta t/T. \tag{14}$$

Когда $t = T$, то из (14) получим $\Psi_{n+2} = 2\lambda\beta = 0$.

Следовательно, на $[0, T]$

$$\lambda\beta = 0. \tag{15}$$

Из условия 1° теоремы имеем

$$\frac{\partial H^0}{\partial u_i} = 0,\ i = \overline{1, m},\ i \neq j; \tag{16}$$

$$\frac{\partial H^0}{\partial v_j} \Psi_{n+1} - \lambda \operatorname{sign} v_j = 0.$$

Обозначим

$$N=\{t:\partial H^0/\partial u_j\neq 0\}\subseteq[0,\ T];$$

$$M=\{t:\partial H^0/\partial u_j=0\}\subseteq[0,\ T].$$

Согласно (10), (16) имеем:

а) если $\beta\neq 0$, $\lambda=0$, то

$$\Psi'_{n+1}=\Psi'_{n+1}=-\partial H^0/\partial u_j=0,\ \forall\, t\in[0,\ T],$$

т. е. $N=\varnothing$, $M=[0,\ T]$;

б) если же $\beta=0$, $\lambda\neq 0$, $\int_0^T|v_j|dt=S$, то $N\neq\varnothing$.

Легко проверить, что когда $\partial H^0/\partial u_j\neq 0$, тогда $v_j=0$. В самом деле, если $\partial H^0/\partial u_j\neq 0$ и $v_j\neq 0$, то $\Psi'_{n+1}\neq 0$ и Ψ'_{n+1}—переменная во времени функция, что противоречит уравнению (16). Следовательно, на N должно быть выполнено уравнение $v_j(t)=0$. В силу этого уравнение (16) на N становится неопределенным. Однако неопределенность уравнения (16) на N не вносит неопределенности в решение задачи 1, поскольку на N $v_j(t)$ определенно.

Таким образом, при $\lambda\neq 0$ оптимальное управление должно определяться из уравнений

$$\frac{\partial H^0}{\partial u_j}=0 \text{ на } M;\ v_j=0 \text{ на } N,\ M\cup N=[0,\ T]. \tag{17}$$

Однако при заданном λ множества M и N определяются неоднозначно, в результате и решение задачи 1 получается неоднозначным. В связи с этим возникает вопрос выбора такого λ, при котором J^* достигает минимума при заданном S.

Можно доказать, что множитель λ, обеспечивающий равенство $\int^T|v_j|dt=S$ и доставляющий минимум функционалу J^*, минимален.

Очевидно, что

$$|\Psi_{n+1}(t)|\begin{cases}=\lambda, & \text{при } t\in M\\ \leqslant\lambda, & \text{при } t\in M\end{cases}$$

Причем на N справедливо

$$\Psi_{n+1}(t)=\Psi_{n+1}(t_s)-\int_{t_s}^{t}\left(\frac{\partial H^0}{\partial u_j}\right)^* dt,\ t\in\Delta t_s, \tag{18}$$

которое следует из (10) где $s=\overline{0,\ e}$, $t_0=0$, $\Delta t_s=t_{s+1}-t_s$, $t_{e+1}=T$, $(\partial H^0/\partial u_j)^*=\partial H^0/\partial u_j|v_j=0$, $N=\bigcup\limits_{\gamma}\Delta t_s$, $M=\bigcup\limits_{\alpha}\Delta t_s$, α, γ — соответственно множества четных и нечетных чисел последовательности натурального ряда до e, $e=2k$; k—число интервалов, на которых $v_j=0$;

$$\Psi_{n+1}(t_s)=\lambda\,\mathrm{sign}\,v_j(t_s-0);$$

$$\Psi_{n+1}(t_{s+1})=\lambda\,\mathrm{sign}\,v_j(t_{s+1}+0). \tag{19}$$

Если $M_0=\{t:\partial H^0/\partial u_j=0,\ v_j(t)=0\}\subset M$ и $M_0\neq\varnothing$, тогда на M_0 $\mathrm{sign}\,v_j(t)$ неопределен. Однако, учитывая (18), (19) и $\partial H^0/\partial u_j=0$ на M_0, получим $\Psi'_{n+1}(t)=\Psi_{n+1}(t_s)$, где $t\in\Delta t_s$, $\Delta t_s\subset M_0$, t_s— предельная слева точка подмножества Δt_s.

Неизвестные моменты времени t_s, $s=\overline{1,\ e}$, определяются из условия

$$\Omega_s=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{sign}\,v_j(t_{s+1}+0)-\lambda\,\mathrm{sign}\,v_j(t_s-0), & s=\overline{2,\ e-2}\\ \lambda\,\mathrm{sign}\,v_j(t_{s+1}+0)-\Psi_{n+1}(t_s), & s=0\\ \Psi_{n+1}(t_{s+1})-\lambda\,\mathrm{sign}\,v_j(t_s-0), & s=e\end{cases} \tag{20}$$

где

$$\Omega_s \equiv \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\frac{\partial H^0}{\partial u_j}\right)^* dt;$$

$$\Psi_{n+1}(l) \begin{cases} \neq 0, & \text{когда } u(l) \text{ фиксировано} \\ = 0, & \text{в противном случае, } l = 0:\ T. \end{cases}$$

Из (20) легко получить

$$|\Omega_s| \begin{cases} = 2\lambda, & \text{если } s = 2,\ 4,\ \ldots,\ e-2 \\ = \lambda, & \text{когда } \Psi_{n+1}(t_s) = 0 \\ \leq \lambda, & \text{когда } \Psi_{n+1}(t_s) \neq 0 \end{cases} \Bigg\},\ s = 0;\ e+1 \tag{21}$$

Минимальность λ следует из (21). Неотрицательность λ можно доказать известными схемами.

Задача 2. Пусть требуется минимизировать (6) при ограничениях (1), (2) и

$$V_{om}^T u(t) = \sup \sum_{k=1}^{r} \| u(t_k) - u(t_{k-1}) \| \leq S_1, \tag{22}$$

где $V^T{}_{om} u(t)$ — полное изменение вектора $u(t)$ на $[0, T]$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $t_r = T$; S_1 — заданное число.

Обозначим

$$\varphi = R - \| u \| = 0; \tag{23}$$

$$\dot{R} = v = f_{n+1}(v).$$

Тогда, предполагая $R(t)$ непрерывным, выражение (22) можно заменить интегралом

$$V_{om}^T u(t) = \int_0^T |v|\, dt \leq S_1. \tag{24}$$

Введя дополнительный параметр β_1, неравенство (24) можно свести к равенству

$$V_{om}^T u(t) - S_1 + \beta_1^2 = 0,$$

и, поступив так же, как и выше, интеграл (6) представим в виде

$$J^* = \int_0^T \bar{f}_0(x,\ u,\ v,\ \beta_1) dt - \lambda_1 S_1,$$

где

$$\bar{f}_0 = f_0 + \mu(t)\varphi + \lambda_1 \left(|v| + \frac{1}{T}\beta_1^2 \right),$$

$\mu(t)$, λ_1 — множители Лагранжа, $\lambda_1 = \text{const}$ на $[0, T]$.

После этих преобразований задача 2, как видно, сводится к типу задачи 1, поэтому результаты ее решения без существенных изменений применимы для задачи 2.

Замечание. В задачах, рассмотренных выше, предполагалось, что функции $u_j(t)$ и $R(t)$ непрерывны. Однако в задачах оптимального уравнения, как правило, управляющий параметр получается кусочно-непрерывным. В силу этого интегралы (5) и (24) соответственно должны быть заменены на

$$V_0^T u_j(t) = \int_0^T |v_j|\, dt + \sum_{i=1}^{q} |\xi_{ij}| \leqslant S;$$

$$V_{om}^T u(t) = \int_0^T |v|\, dt + \sum_{i=1}^{p} |\xi_i| \leqslant S_1,$$

где

$$\xi_{ij} \equiv u_j(t_i+0) - u_j(t_i-0), \quad i = \overline{1, q},$$

$$\xi_i \equiv R(t_i+0) - R(t_i-0), \quad i = \overline{1, p},$$

q и p — соответственно число разрывов функций $u_j(t)$ и $R(t)$ на $[0, T]$. Эта замена принципиальных изменений в полученные выше результаты не вносит. Действительно, если функции $u_j(t)$ и $R(t)$ непрерывны, тогда (4) и (23) должны быть заменены соответственно уравнениями

$$\dot{u}_j = v_j + \sum_{i=1}^{q} |\xi_{ij}|\, \delta(t-t_i);$$

$$\dot{R} = v + \sum_{i=1}^{p} |\xi_i|\, \delta(t-t_i).$$

Институт Арматом

Ս. Վ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ, Ա. Ս. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Կառավարող ֆունկցիայի լրիվ փոփոխության սահմանափակմամբ համակարգերի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմաններ

Դիտարկված են համակարգերի օպտիմիզացման խնդիրներ հետևյալ տիպի սահմանափակումների դեպքում.

$$1)\ V_0^T u_j(t) \leqslant S = \mathrm{Const},$$

$$2)\ V_{om}^T u(t) \leqslant S_1 = \mathrm{Const}.$$

որտեղ $V_0^T u_j(t)$-ն $u_j(t)$ ֆունկցիայի լրիվ փոփոխությունն $[O, T]$ միջակայքում, $V^T_{om} u(t)$-ն, $u(t) = [u_1(t), \ldots, u_m(t)]$ վեկտորի չափի լրիվ փոփոխությունն է $[O, T]$ միջակայքում, T-ն կառավարման տևողությունն է։

Այդ երկու խնդիրների համար ապացուցված են թեորեմներ օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանների վերաբերյալ։ Թեորեմների ապացուցման ընթացքում համալուծ վեկտորի Ψ բաղադրիչները դիտարկվում են որպես ֆունկցիոնալ կառավարման ֆունկցիայից, որոնք ունեն զրոյից տարբեր ֆունկցիոնալ ածանցյալներ։

Թեորեմների հիմնական առնչությունից հետևում է, որ օպտիմալ պրոցեսների ժամանակ մաքսիմում արժեք է ընդունում Համիլտոնի ոչ լրիվ H° ֆունկցիան։ Այն որոշվում է որպես Համիլտոնի սովորական H ֆունկցիայի և նրա դիֆերենցիալի ըստ համալուծ վեկտորի $\delta_\Psi H$ տարբերություն։ Որպես հետևանք ստացվել է $\partial H^\circ/\partial u = \partial H/\partial u$, որտեղ $\partial H/\partial u$ կառուցված է սևեռված Ψ-ի ժամանակ։

Դիտարկված սահմանափակումներով օպտիմալ կառավարման համակարգերը ունեն լայն կիրառական նշանակություն հատկապես «սահող ռեժիմներով» խնդիրների ուսումնասիրման համար։ Հոդվածում բերված օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները կիրառելի են նաև «սահող ռեժիմներով» խնդիրների լուծման ժամանակ, որոնց համար սովորական մաքսիմումի սկզբունքը կիրառելի չէ։

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Л. Янг. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., Мир, 1974. [2] Р. В. Гамкрелидзе, ДАН СССР, т. 143, № 6 (1962). [3] А. И. Пропой. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М., Наука, 1973. [4] S. V. Shahverdian. AMSE Press, Modelling & Simulation, v. 10, № 2, (1987). [5] Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.