УДК 519.1

А. С. Асратян, А. Н. Мирумян

О преобразованиях реберных раскрасок полного двудольного графа $K_{n,n}$

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. Г. Шукурьяном 14/VIII 1993)

При исследовании любого множества L комбинаторных объектов важной задачей является нахождение такой системы преобразований S над объектами L , что для любых $f, g \in L$ существует последовательность $f_1, f_2, \dots, f_r$ объектов из L , $r = r(f, g) \geq 2$, где $f_1 = f$, $f_r = g$ и f_{i+1} получен из f_i одним из преобразований системы S , $i = 1, \dots, r-1$. Тогда система S называется полной системой преобразования для L .

Реберной n -раскраской графа $G = (V(G), E(G))$ называется отображение $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Если $f(e) = i$ для ребра e , то говорят, что ребро e окрашено в цвет i . Реберная n -раскраска называется правильной, если $f(e) \neq f(e')$ для любых двух ребер e и e' .

Все понятия, не определенные в работе, приведены в (1).

В 1975 г. Коциг (2) дал полную систему преобразований для множества $L(G)$ правильных реберных 3-раскрасок кубического (3-регулярного) графа и поставил следующую проблему: можно ли от любой правильной реберной n -раскраски n -регулярного графа G , $n > 3$, перейти к любой другой правильной n -раскраске G , используя преобразования лишь двухцветных и трехцветных подграфов так, чтобы промежуточные раскраски G также были бы правильными? В терминах полных систем преобразований проблему Коцига можно переформулировать следующим образом: существует ли такая полная система преобразований для множества правильных реберных 3-раскрасок 3-регулярного графа, которая была бы полной системой преобразований и для множества правильных реберных n -раскрасок n -регулярного графа, $n > 3$?

В работе (3) было показано, что в общем случае такой системы преобразований не существует. Однако в случае, когда G — двудольный граф, существует полная система преобразований требуемого вида, состоящая из двух преобразований (4,5).

В настоящей работе исследуются полные системы преобразований для множества $L(K_{n,n})$ правильных реберных n -раскрасок полного двудольного графа $K_{n,n}$, $n > 3$. Исследование таких систем обусловлено тем, что множество $L(K_{n,n})$ соответствует множеству латинских квадратов порядка n , которые находят широкое применение в различных областях математики и в приложениях (6,7).

Пусть f — правильная реберная n -раскраска графа $K_{n,n}$ и

$E_i = \{e \in E(K_{n,n}) / f(e) = i\}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Далее пусть α, β, γ — три различных цвета, $1 < \alpha < \beta < \gamma < n$, а $C = \{v_1, e_1, v_2, \dots, v_{2k}, e_{2k}, v_1\}$ такой цикл, что $f(e_{2j}) = \alpha$, $f(e_{2j-1}) \in \{\beta, \gamma\}$ для каждого $j = 1, \dots, k$. Определим преобразование раскраски f , используя цикл C . Возможны два случая.

а) $f(e_{2j-1}) = \beta$ для каждого $j = 1, \dots, k$. 2-преобразованием раскраски f вдоль C назовем такое преобразование, при котором ребра вне C сохраняют свой цвет, а каждое ребро $e \in C$ получает цвет α , если $f(e) = \beta$, и цвет β , если $f(e) = \alpha$.

б) $\beta, \gamma \in \{f(e_1), f(e_3), \dots, f(e_{2k-1})\}$. Разобьем множество $(E_\beta \cup E_\gamma \cup \{e_2, e_4, \dots, e_{2k}\}) \setminus \{e_1, e_3, \dots, e_{2k-1}\}$ на два 1-фактора P_1 и P_2 . Определим правильную реберную n -раскраску f' следующим образом:

$$f(e') = \begin{cases} f(e), & \text{если } f(e) \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \alpha, & \text{если } e \in (E_\alpha \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2k-1}\}) \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2k}\} \\ \beta, & \text{если } e \in P_1 \\ \gamma, & \text{если } e \in P_2 \end{cases}$$

Преобразование n -раскраски f в n -раскраску f' назовем 3-преобразованием.

Пусть S_1 — система, состоящая из двух преобразований: 3-преобразования и 2-преобразования. В (4.5) показано, что S_1 — полная система преобразований для множества правильных реберных n -раскрасок n -регулярного двудольного графа, $n > 2$. Обозначим через F_n подмножество тех правильных реберных n -раскрасок из множества $L(K_{n,n})$, в каждой из которых любой 2-цветный цикл имеет длину 4.

Теорема 1. Если $f \in L(K_{n,n}) \setminus F_n$ и $g \in F_n$, то g не может быть получен из f последовательностью 3-преобразований.

Теорема 2. Каждая n -раскраска $g \in L(K_{n,n}) \setminus F_n$ может быть получена из любой другой n -раскраски $f \in L(K_{n,n})$ последовательностью 3-преобразований.

Теорема 3. $F_n \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $n = 2^m$ для некоторого $m \geq 1$.

Теорема 4. Для того, чтобы множество $L(K_{n,n})$ имело полную систему преобразований, состоящую только из одного 3-преобразования, необходимо и достаточно, чтобы $n = 2^m$ для некоторого $m \geq 1$.

Используя теоремы 1 и 3, мы получаем также следующий результат.

Теорема 5. Каждое преобразование φ системы S_1 является независимым, т. е. для φ существует такое $n = n(\varphi) > 3$ и такие n -раскраски $f, g \in L(K_{n,n})$, что g нельзя получить из f последовательностью преобразований φ .

Ереванский государственный университет

Ա. Ս. ՀԱՍՐԱՔՅԱՆ, Ա. Ն. ՄԻՐՈՒՄՅԱՆ

$K_{n,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆի կողային ներկումների ձևափոխությունների մասին

Դիցուք G -ն երկկողմանի n -անցույթի գրաֆ է: Նշանակենք $L(G)$ -ով G -ի բոլոր կողային ճիշտ ներկումների բազմությունը: (3.4) աշխատանքներում գտնված են երկու տիպի ձևափոխություններ՝ 3-ձևափոխություն և 2-ձևափոխություն, այնպես, որ $L(G)$ -ից յուրաքանչյուր f, g զույգի համար ձևափոխություն ունի ճիշտ n ներկումների $f_1, \dots, f_r$ հաջորդականություն $L(G)$ -

ից, $r = r(i, g) > 2$ այնպես, որ $i_1 = i$, $i_r = g$ և i_{i+1} -ը ստացված է i_i -ից կամ 2-ձևափոխությամբ կամ 3-ձևափոխությամբ: Աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է:

Պ ե ո Ր ե մ. Որպեսզի $L(K_{n,n})$ բազմությունը պատկանող յուրաքանչյուր Γ ներկում հնարավոր լինի ստանալ կամայական ուրիշ $g \in L(G)$ ներկումից, օգտագործելով միայն 3-ձևափոխությունները, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $n \neq 2^m$, $m > 2$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Փ. Харари, Теория графов, М., Мир, 1973. ² А. Kotzig, Discrete Mathematics, v. 11, p. 391—399, (1975). ³ А. С. Асратян, А. Н. Мирумян, Дискретная математика, т. 4, вып. 2, с. 96—98 (1992). ⁴ А. С. Асратян, А. Н. Мирумян, ДАН СССР, т. 316, № 1 (1991). ⁵ А. С. Асратян, А. Н. Мирумян, в кн.: Мат. вопр. кибернетики, вып. 4, М., Наука, с. 93—111, 1992. ⁶ J. Benes, A. D. Keedwell, Latin Squares and their applications N.-Y., Academic Press, 1976. ⁷ D. Raghavarao, Constructions and combinatorial problems in design of experiments N. Y., Wiley, 1971.