ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 1995 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 5 4.76

В. А. Мирзоян

Структурные теоремы для кэлеровых Ric-полусимметрических пространств

(Представлено чл.-корр. НАН Армении В. С. Захаряном 29/VII 1993)

Как известно, кэлеровым многообразием называется четномерное вещественное многообразие M с комплексной структурой $J(J^2=I)$, наделенное эрмитовой метрикой g (т. е. римановой метрикой g, обладающей следующим свойством: $g(JX, JY)=g(X, Y)$, причем J является параллельным тензорным полем в римановой связности ∇ на $M(\nabla_X J=0$ для любого $X)$. С основными фактами и теоремами геометрии кэлеровых пространств можно познакомиться, например, по монографиям [1,2].

Цель настоящей работы — распространить на кэлеровы многообразия основные результаты автора [3], полученные для римановых многообразий, удовлетворяющих условию $R(X,Y)\cdot R_1=0$.

Перейдем к более точным определениям и формулировкам.

Риманово многообразие M с римановой связностью ∇, операторами кривизны $R(X, Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}$ и тензором Риччи R_1 называется Ric-полусимметрическим, если $R(X, Y)\cdot R_1=0$ для любых касательных к M векторных полей X, Y. Из тождества Риччи $(R(X, Y)\cdot R_1)(Z)=R(X, Y)R_1(Z)-R_1(R(X, Y)Z)$ следует, что условие $R(X, Y)\cdot R_1=0$ равносильно следующему условию: $R(X, Y)\circ R_1=R_1\circ R(X, Y)$, т. е. коммутируемости тензора Риччи R_1 со всеми операторами кривизны $R(X, Y)$.

Римановы Ric-полусимметрические пространства были открыты как обобщения римановых пространств с параллельным тензором Риччи ($\nabla R_1=0$) и полусимметрических пространств, характеризуемых условием $R(X, Y)\cdot R=0$, где R—тензор кривизны. Подробная информация об этих пространствах и библиография содержится в обзорной статье автора [4].

Примерами Ric-полусимметрических пространств являются двумерные римановы пространства, эйнштейновы и полуэйнштейновы пространства. Последние определяются следующим образом. Пусть $x\in M$—произвольная точка, а $T_x(M)$—касательное пространство. Подпространство $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$, определенное равенством $T_x^{(0)}=\{X\in T_x(M);\ R(X, Y)=0\ \forall\, Y\in T_x(M)\}$, называется пространством дефектности многообразия M в точке x, а его размерность μ_x—индексом дефектности в этой точке ([5]). Пусть $T_x^{(1)}$—ортогональное дополнение к $T_x^{(0)}$ в $T_x(M)$. Легко показать, что если $Z \in T_x^{(0)}$, то $R_1(Z)=0$, а $T_x^{(1)}$ инвариантно относительно операторов $R(X, Y)$ и тензора R_1. Риманово многообразие M с ненулевым индексом дефектности в каждой точке x называется полуэйнштейновым, если его тензор Риччи R_1 на каждом подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение. В ([3]) автором была доказана следующая структурная

Теорема 1.. Риманово пространство M класса C^∞ является Ric-полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полуэйнштейновым, либо произведением (локально) таких пространств.

Для кэлеровых многообразий, удовлетворяющих условию $R(X, Y) \cdot R_1=0$, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Односвязное полное аналитическое кэлерово многообразие M класса C^∞ удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1=0$ тогда и только тогда, когда оно голоморфно изометрично прямому произведению $M^0 \times M^1 \times \ldots \times M^r$ односвязных и полных кэлеровых многообразий $M^0, M^1, \ldots, M^r$, где M^0—евклидово пространство, а $M^1, \ldots, M^r$—неприводимые римановы пространства, каждое из которых является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полуэйнштейновым.

Теорема 3. Пусть M является односвязным и полным кэлеровым многообразием с ненулевым индексом дефектности и пусть распределение T^0 параллельно. Если M удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1=0$, то оно голоморфно изометрично прямому произведению $M^0 \times M^1 \times \ldots \times M^t$ односвязных полных кэлеровых многообразий $M^0, M^1, \cdots, M^t$, где M^0—евклидово пространство, а каждое из $M^1, \cdots, M^t$ является либо неплоским двумерным, либо неприводимым эйнштейновым (в частности, риччи-плоским) пространством с нулевым индексом дефектности. M предполагается аналитическим.

Доказательство теорем 2 и 3 опирается на усиленный вариант теоремы 1, который мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 4. Связное, односвязное и полное риманово многообразие M класса C^∞ является Ric-полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно изометрично прямому произведению $M^0 \times M^1 \times \ldots \times M^s$, где M^0—евклидово пространство, а M^φ ($\varphi = 1, \ldots, s$)—односвязные полные неприводимые римановы многообразия, каждое из которых является либо двумерным, либо эйнштейновым, либо полуэйнштейновым (M—аналитическое).

Армянский государственный
инженерный университет

Վ. Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

Կառուցվածքային թեորեմներ Քելերյան Ric-կիսասիմետրիկ տարածությունների համար

Ապացուցված է, որ միակապ լրիվ քելերյան M տարածությունը բավարարում է $R(X, Y) \cdot R_1=0$ պայմանին այն և միայն այն դեպքում, երբ նա հոլոմորֆ իզոմետրիկ է $M^0, M^1, \ldots, M^r$ միակապ լրիվ քելերյան տարածությունների $M^0 \times M^1 \times \ldots \times M^r$ ուղիղ արտադրյալին, որտեղ M^0-ն էվկլիդեսյան տարածություն է, իսկ $M^1, \ldots, M^r$-ը՝ անվերածելի տարածություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրը կամ երկչափ է, կամ էյնշտեյնյան, կամ կիսաէյնշտեյնյան։

Դիտարկված է նաև մասնավոր դեպք։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Ш. Кобаяси, К. Намидзу, Основы дифференциальной геометрии. т. 2, М., Наука, 1981. [2] K. Yano, M. Kon, Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, v. 3, World Scientific., 1984. [3] В. А. Мирзоян, Изв. вузов. Математика, № 6, 1992. [4] В. А. Мирзоян, Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 23, 1991. [5] S. S. Chern, N. H. Kuiper, Ann. of Math., v. 56, № 3 (1952).