ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 512.4

В. Г. Микаелян

О тождествах конечных расширений групп.

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 12/IX 1993)

В качестве основных понятий, с помощью которых автором изучаются тождества расширений групп, являются следующие $\circ$-произведения. Пусть G, H—группы, $\mathbf{V}\mathbf{U}$—многообразия групп (терминологию см. в ([1])).

Определение. 1. *Обозначим через* $\mathbf{V} \circ G$ *многообразие, порожденное расширениями групп из* $\mathbf{V}$ *посредством группы* G

Определение 2. *Обозначим через* $H \circ \mathbf{U}$ *многообразие, порожденное всеми расширениями группы* H *посредством групп из* $\mathbf{U}$.

Иногда, если не будет ясно, какое из произведений имеем в виду, будем говорить «*ro*-произведение» и «*lo*-произведение». Всегда выполняются

$$\mathbf{V} \circ F_{\infty}(\mathrm{Var}\, G) = \mathbf{V} \cdot \mathrm{Var}\, G, \qquad F_{\infty}(\mathrm{Var}\, H) \circ \mathbf{U} = \mathrm{Var}\, H \cdot \mathbf{U}$$

(где справа стоят обычные произведения). Поэтому ставится вопрос, когда справедливы равенства

$$\mathbf{V} \circ G = \mathbf{V} \cdot \mathrm{Var}\, G, \qquad H \circ \mathbf{U} = \mathrm{Var}\, H \cdot \mathbf{U}$$

для конечных H или G.

Для абеленых *ro*-произведений полный ответ дает следующая

Теорема 1. *Пусть* $G_i = \mathrm{gp}\{x \in G \mid x^i = e\}$. *Если* n *есть период группы* G, *то пусть* $p^{k(p)}$ *есть наибольшая степень простого числа* p, *делящая* n $\mathbf{A}$ *многообразие всех абелевых групп*, $\mathbf{A}_n$ — *подмногообразие групп периодов, делящих* n. *Тогда для любой абелевой группы* G

a) *если* G *не имеет конечного периода, то* $\mathbf{V} \circ G = \mathbf{V} \cdot \mathrm{Var}\, G = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$ *для любого* $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$;

b) *если* G *имеет период* n, *то равенство* $\mathbf{V} \circ G = \mathbf{V} \cdot \mathrm{Var}\, G = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_n$:

1) *всегда имеет место, при* $\mathbf{V} = \mathbf{A}$,

2) *при* $\mathbf{V} = \mathbf{A}_m$ *имеет место тогда и только тогда, когда для всех простых* p, *делящих* m *и* n, *мощности факторов* $G_{p^{k(p)}}/G_{p^{k(p)-1}}$ *бесконечны.*

Эта теорема не распространяется на неабелев случай. Например, для любых различных простых p, q, r, $(A_p \cdot A_q) \cdot Z_r \neq A_p \cdot A_q \cdot A_r$, хотя $(p \cdot q, r) = 1$.

Следующая теорема показывает, что абелевость G тоже существенна. Эта теорема автором была доказана сначала для абелевых, нильпотентных и некоторых других многообразий. Затем с помощью одного замечания А. Ю. Ольшанского она была распространена им на регулярные многообразия. (П. Нейман (2) назвал многообразие регулярным, если ни для какого $n \geqslant 1$ его свободную группу ранга n нельзя вложить в свободную группу ранга $n-1$. Регулярными являются в частности все локально разрешимые многообразия).

Теорема 2. *Для любого регулярного многообразия* V *и любой неабелевой конечной группы* G *имеет место*

$$V \cdot G \neq V \cdot \operatorname{Var} G.$$

Доказательство основано на лемме.

Лемма 1. *Пусть* $W = V \cdot G$, *а* W *и* V *есть вербальные подгруппы в* F_∞, *соответствующие многообразиям* W *и* V. *Тогда для любого* n *имеет место равенство* $W(F_\infty) = \bigcap V(N)$, *где пересечение берется по всем нормальным подгруппам* N *группы* F_n, *таким, что* F_n/N *изоморфна подгруппе в* G.

Если многообразие V порождается своей свободной группой ранга r и не порождается V-свободной группой ранга $r-1$, то r называется базисным рангом V. Если V не порождается группой $F_n(V)$ ни для какого n, то V называется многообразием бесконечного базисного ранга. Легко заметить, что если $V \cdot U$ имеет базисный ранг r, то $V \cdot F_r(U) = V \cdot U$.

Поэтому из теоремы 2 получаем

Следствие. *Если* V *регулярное неединичное многообразие, а* U — *локально конечное и неабелевое, то* $V \cdot U$ *является многообразием бесконечного базисного ранга.*

Последний факт есть обобщение теоремы Г. Хигмена (4.8 из (3), случай $V = A_p$) и теоремы А. Л. Шмелькина и А. Н. Красильникова (№ 2 из (1), V нильпотентно).

В некоторых случаях можно в явном виде указать тождества, отделяющие $V \cdot G$ от $V \cdot \operatorname{Var} G$ (или $H \cdot U$ от $\operatorname{Var} H \cdot U$, т. е. такие, которые выполняются в $V \cdot G$, но не в $V \cdot \operatorname{Var} G$ (в $H \cdot U$, но не в $\operatorname{Var} H \cdot U$).

Пример 1. $Z_p \cdot A_p$ нильпотентно класса 2, $A_p \cdot Z_p$ нильпотентно класса p, но A_p^2 ненильпотентное многообразие.

Пример 2. Пусть G — конечная неабелевая разрешимая группа, V — нильпотентное многообразие класса c, причем экспонента V имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $|G|$. Индуктивно определяется тождество, названное Пауэном «тождеством абсолютного ранга» (5),

$$w_0^d = x, \ldots, w_{i+1}^d = \prod_\sigma \left((w_i^d)^{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2d)}} \right)^{\operatorname{sgn} \sigma},$$

где произведение берется по всем подстановкам σ множества символов $\{1, 2, \ldots, 2d\}$. Тождеством, отделяющим $\mathbf{V} \circ G$ от $\mathbf{V} \cdot \mathrm{Var}\, G$, будет $w_t^k = 1$, где t — длина разрешимости $\mathbf{V} \circ G$ (т. е. не больше суммы длин $\mathbf{V}$ и G), $k = |G|$.

Пример 3. Пусть $\mathbf{V}$ — кроссово многообразие, т. е. $\mathbf{V} = \mathrm{Var}\, A$, где A конечная группа, а G — конечная неабелева группа. Определим „тождество главного централизатора" ([6]):

$$v_3 = [x_1, x_2, (x_1^{-1} \cdot x_2)^{y_{1,2}}] = 1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = [v_{n-1}, x_n^{y_n}, (x_1^{-1} \cdot x_n)^{y_{1,n}}, \ldots, (x_{n-1}^{-1} \cdot x_n)^{y_{n-1,n}}] = 1,$$

$$\text{при} \quad n > 2$$

$\Big(v_n$ есть слово от $\dfrac{1}{2}(n-1)(n+4)$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_3, \ldots, y_n$, $y_{i,j}$, $1 \leqslant i < j < n\Big)$. Тождеством, отделяющим $\mathbf{V} \circ G$ от $\mathbf{V} \cdot \mathrm{Var}\, G$, будет $v_n = 1$, для любого n, большего чем $|A|^{|G|}$.

Пример 4. Если $\mathbf{U}$ неабелево кроссово многообразие, экспонента которого не делится на простое число p, то $\mathbf{Z}_p^n \circ \mathbf{U}$ от $\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{U}$ отделяется тождеством

$$\prod_\sigma (u^{y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(2k)}})^{\operatorname{sgn} \sigma} = 1,$$

где произведение берется так же, как и в примере 2.

Положим

$$(\cdots(\mathbf{V} \circ G_1) \circ \cdots) \circ G_k = \mathbf{V} \circ G_1 \circ \cdots \circ G_k,$$

$$H_k \circ H_{k-1} \circ \cdots \circ (H_1 \circ \mathbf{U}) \cdots) = H_k \circ \cdots \circ H_1 \circ \mathbf{U}.$$

Определение 3. а) *Назовем многообразие D ro-разложимым, если из равенства $D = \mathbf{V} \circ G$ следует, что $G = \{e\}$, или $\mathrm{Var}\, G = D$ и $\mathbf{V}$ — тривиальное многообразие.*

б) *Выражение $D = \mathbf{V} \circ G_1 \circ \cdots \circ G_k$ назовем ro-разложением, если $\mathbf{V}$ есть ro-неразложимое многообразие, а G_i есть группы, отличные от $\{e\}$.*

в) *Многообразие D назовем ro-разложимым, если для него существует ro-разложение.*

Аналогично определяются *lo*-неразложимость и т. д. Нильпотентное многообразие может быть *ro*-разложимым, например $\mathbf{A}_p \circ Z_p$. *ro*-неразложимыми являются все абелевы многообразия, а также те нильпотентные многообразия, экспонента которых делится на два различных простых числа. Абелево многообразие может быть *lo*-разложимым. Например пусть n — любое четное число, не делящееся на 4, тогда $\mathbf{A}_n = \mathbf{Z}_2 \circ \mathbf{A}_{\frac{n}{2}}$.

Однозначность *o*-разложений нарушается в обоих *o*-произведениях.

В случае ro-произведения можно говорить о существовании ro-разложения. Действительно,

Теорема 3. *Для любого множества $\{G_i \mid i \in \mathrm{N}\}$ нетривиальных групп и для любых многообразий U_k, $k = 1, 2, \ldots$ объединение по k произведений вида $\mathrm{U}_k \circ G_1 \circ \cdots \circ G_k$ порождает многообразие всех групп.*

Такое утверждение неверно для lo-произведений. Пусть H совершенная группа, т. е. без центра, и все автоморфизмы H внутренние. Положим $H_i \cong H$, $\mathrm{U}_k = \mathrm{Var}\, H$. Тогда для любого k выполняется

$$\mathrm{V} = H_k \circ \cdots \circ H_1 \circ \mathrm{V}.$$

В заключение автор хочет выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Александру Юрьевичу Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Վ. Հ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Խմբերի վերջավոր ընդլայնումների նույնությունների մասին

Սահմանվում են $\mathrm{V} \circ G$ և $H \circ \mathrm{U}$ արտադրյալները: Աբելյան խմբերի դեպքում լրիվին նկարագրվում են այն հնարավորությունները, երբ $\mathrm{V} \circ G = \mathrm{V} \circ \mathrm{Var}\, G$: Նշանակալիորեն ուժեղացնելով Գ. Հիգմանի, Ա. Լ. Շմելկինի և Ա. Ն. Կրասիլնիկովի արդյունքները կառուցված է անվերջ բազիսային ռանգի բազմաձևությունների մի լայն դաս: Բերված են $\mathrm{V} \circ G$ և $\mathrm{V} \circ \mathrm{Var}\, G$, $H \circ \mathrm{U}$ և $\mathrm{Var}\, H \circ \mathrm{U}$ բազմաձևությունները իրարից բաժանող նույնությունների օրինակներ: Դիտարկվում են lo- և ro- բերվողության հնարավորությունները երկու արտադրյալների համար: Ընդ որում դրական պատասխան ստացվում է երկրորդ արտադրյալի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. Нейман*, Многообразия групп. Мир, М., 1969. [2] *P. M. Neumann*, Arch. Math., v. 16, p. 6–21 (1965). [3] *G. Higman*, Quart. J. Math. Oxford, v. (2), 10, p. 165–178 (1959). [4] *А. Н. Красильников, А. Л. Шмелькин*, Алгебра и логика т. 20, № 5, с. 546–554 (1981). [5] *M. B. Powell*, Quart. J. Math. Oxford, v. (2), 15, p. 131–148 (1964). [6] *L. G. Kovacs, M. F. Newman*, Proc. Roy. Soc. London, A, v. 292, p. 530–536 (1966).