

УДК 517.94

А. О. Оганесян

Принцип Гюйгенса, свойство Пенлеве и линейные дифференциальные уравнения

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсисяном 12/VIII 1993)

1⁰. Задача описания всех линейных гиперболических уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, известна как проблема Адамара. Сформулированная еще в 20-х годах нашего столетия, эта проблема, несмотря на усилия многих известных математиков (исторический обзор см. (1, 2)), до сих пор полностью не решена. Первый значительный вклад в решение этой проблемы внес сам Адамар (3), который описал элементарное (фундаментальное) решение задачи Коши для гиперболического уравнения

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0 \quad (1)$$

$$u|_S = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = g. \quad (2)$$

Здесь S — пространственно-подобное многообразие размерности $(n-1)$, а $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная в направлении нормали ν к S .

Определение 1. Уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса, если значение решения задачи Коши (1), (2) с произвольными начальными данными в каждой точке x зависит от начальных данных только на пересечении многообразия S с характеристическим конусом с вершиной в точке x_0 .

Элементарное решение уравнения (1), согласно теории Адамара, — это решение, имеющее особенность вдоль некоторой (действительной или мнимой) поверхности. Ответ на вопрос, какой должна быть эта поверхность, дает важная теорема Леру и Делассю (см. (3)): всякая сингулярная поверхность, представляющая решение линейного уравнения (1) с гладкими коэффициентами, должна быть характеристической поверхностью.

Адамар выделил среди этих поверхностей характеристический конд

$$\Gamma(x, x_0) = 0, \quad (3)$$

с вершиной в точке x_0 , где $\Gamma(x, x_0)$ — квадрат геодезического расстояния между точками x и x_0 в n -мерном римановом пространстве с метрикой, порожденной коэффициентами $g^{ij}(x)$. Если искать элементарное решение уравнения (1) в виде

$$u = \Gamma^p \sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu} \Gamma^{\nu} \quad (4)$$

с гладкими коэффициентами U_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots$) и $U_0 = 1$, то непосредственные вычисления дают

$$p = -\frac{n-2}{2}; \quad (5)$$

$$\left(\nu - \frac{n-2}{2}\right) U_{\nu} = -\frac{U_0}{4s^{\nu}} \int_0^s \frac{\tau^{\nu-1} L[U_{\nu-1}]}{U_0} d\tau. \quad (6)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль геодезической кривой, соединяющей x_0 с x . При этом параметр s выбирается так, что точке x_0 соответствует значение $s = 0$.

Из формул (5), (6) следует, что для нечетных n p — не целое число и все U_{ν} однозначно определяются. Для четных n p — целое число и $U_{\frac{n-2}{2}}$ определяется только при выполнении условия согласования*

$$L\left[U_{\frac{n-2}{2}}\right] = 0. \quad (7)$$

В случае же, когда условие (7) не выполняется, в элементарном решении появляется логарифмическая особенность

$$u = \Gamma^{-\frac{n-2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} U_{\nu} \Gamma^{\nu} - \ln \Gamma \sum_{\nu=\frac{n-2}{2}}^{\infty} U_{\nu} \Gamma^{\nu - \frac{n-2}{2}}. \quad (8)$$

Пользуясь представлениями решений задачи Коши через коэффициенты элементарных решений (4), (8), Адамар доказал, что для нечетных n нет гюйгенсовых уравнений⁽³⁾. Если же n — четное, то отсутствие логарифмического члена в элементарном решении (8) (т. е. выполнение условия (7)) эквивалентно выполнимости принципа Гюйгенса для уравнения, формально сопряженного к (1). Это утверждение принято называть критерием Адамара.

2°. Возникает естественный вопрос: какое свойство нелинейных уравнений является обобщением понятия гюйгенсовости? Для ответа на этот вопрос дадим, следуя⁽⁴⁾, определение свойства Пенлеве.

Пусть

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (9)$$

является $(n - 1)$ -мерной поверхностью.

Определение 2. Дифференциальное уравнение с частными производными (не обязательно линейное) обладает свойством Пенлеве, если для произвольного решения, представимого в окрестности многообразия (9) в виде

$$u = \Phi^p \sum_{r=0}^{\infty} U_r \Phi^r$$

с гладкими коэффициентами U_r , p является целым числом.

Из определения 2 следует, что при наличии свойства Пенлеве особенность решения должна быть полюсом. Сравнение с вышесказанным приводит к следующему результату.

Теорема 1. Уравнение (1) обладает свойством Пенлеве тогда и только тогда, когда формально сопряженное к нему уравнение удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Заметим, что в качестве поверхности (9) для уравнения (1) может служить только характеристическая поверхность. При этом достаточно ограничиться рассмотрением только характеристических коноидов, так как любая характеристическая поверхность «соткана» из би-характеристик, каждую из которых можно «вложить» в соответствующий коноид. Поэтому наличие на такой поверхности отличных от полюсов особенностей решений приведет к появлению таких же особенностей на коноидах.

Тест Пенлеве играет большую роль в теории нелинейных интегрируемых методом обратной задачи рассеяния уравнений. Теорема 1 указывает на тесную связь принципа Гюйгенса с такими уравнениями. К такому выводу приводит и анализ результатов работ (2), (3) и (6).

В (2, 3) рассматриваются уравнения вида

$$u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i=2}^{n-2} a_i(x-t) u_{y_i y_i} + a_1(x-t) b(y_1) u = 0. \quad (10)$$

Строятся функции $b(y_1) = b(y_1, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$, зависящие от y_1 и произвольных постоянных $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, для которых уравнение (10) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Эти функции оказываются рациональными решениями уравнений в иерархии (7) уравнений Кортевега—де Фриза.

$$u_k = X_k(u) \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где операторы X_k записаны в переменной y_1 .

Теорема 2. Пусть уравнение (10) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Тогда существуют рациональные функции $\gamma_k(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ такие, что $b(y_1, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$ является решением уравнений (11), где

$$\frac{\partial}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial T_j}.$$

Сравнение с результатами работы (7) показывает тесную связь принципа Гюйгенса и биспектральной проблемы.

**Межвузовский центр по прикладным
проблемам математики**

Ա. 2. ՀՈՎՀԱՆՆԻՄՅԱՆ

Հյուզենսի սկզբունքը. ՊԵՆԵԼԵԻ ԲԱՏԿՈՒՄՅՈՒՆԸ Ե ՈՇ ԳԺԱՆԻՆ
ՊԻՖԵՐԵՆԳԻԱՎ ԿԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Հողվածում ուսումնասիրվում է Հյուսիսային սկզբունքի կապը Պենսիլ-
հատկություն հետ երկրորդ կարգի հիպերբոլական տիպի հավասարումների
համար: Յույց է տրվում, որ Պենսիլի հատկությունը նշված դասի հավա-
սարման համար համարժեք է Հյուսիսային սկզբունքին համալուծ հավասար-
ման համար: Նկատագրված է Հյուսիսային սկզբունքի և Կորտեզի դե Ֆրիզի
հավասարումների հիերարխիայի միջև տեղի ունեցող կապը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ P. Günther, *Huygens' Principle and Hyperbolic Equations*. Academic Press, 1988. ² Н. Х. Ибрагимов, А. О. Оганесян, УМН, т. 46, № 3 (1991). ³ Ж. Адамар. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Наука, М., 1978. ⁴ J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, J. Math. Phys., v. 24, № 3 (1983). ⁵ А. О. Оганесян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 25, № 5 (1990). ⁶ M. Adler, J. Moser, Comm. Math. Phys., v. 61, p. 1–30 (1978). ⁷ J. P. Zubelli, F. Magalhães, Comm. Math. Phys., v. 141, p. 329–351 (1991).

