ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 593

С. Г. Далалян

Нормализации мономорфизма в общих категориях

(Представлено академиком НАН Армении Р. В. Амбарцумяном 9/VI 1993)

Вводится понятие нормализации мономорфизма в общих категориях, устанавливается условие его существования. Доказывается, что степень сепарабельности мономорфизма $A\varphi B$ в мономорфизме AuW равна индексу группы изотропии его нормализации $A\chi C$ в u относительно группы изотропии мономорфизма $\psi\in\varphi\setminus\chi$.

В этой заметке все морфизмы мономорфны. Такие категории можно получить, если из произвольной категории отбросить все морфизмы, не являющиеся мономорфизмами. По поводу обозначений, определений общекатегорных понятий регулярности, нормальности, степени сепарабельности, группы изотропии и т. п., а также результатов категорной теории Галуа можно обратиться к ([1, 2]).

Предложение 1. *Если морфизм $A\chi C$ нормален в морфизме AuW, то все элементы S^t обратимы, т. е. изотропная полугруппа S^t совпадает с изотропной группой G^t.*

Для произвольного $\gamma\in S^t$ имеем $u=\chi W=\chi\gamma W$ при некотором CwW. По определению нормальности χ в u существует автоморфизм γ' такой, что $\gamma w=\gamma' w$. Отсюда $\gamma=\gamma'$ в силу мономорфности w.

Далее предполагается, что все левые делители морфизма AuW регулярны в нем (стандартная ситуация, когда AuW — регулярное замыкание объекта A). В частности, u регулярно в себе. Тогда u также нормально в u, следовательно, $S^u=G^u$.

Нормальным замыканием или *нормализацией морфизма* $A\varphi B$ в морфизме AuW называется морфизм $A\chi C$, нормальный в u, делящийся на φ и делящий всякий другой морфизм, удовлетворяющий этим двум условиям.

Предложение 2. *В случае существования нормализация $A\chi C$ морфизма $A\varphi B$ в AuW определяется однозначно с точностью до изоморфизма объекта C.*

Пусть $A\chi'C$ также является нормализацией φ в u. Тогда $\chi'=\chi\sigma'$ и $\chi=\chi'\sigma$ при подходящих морфизмах $C\sigma'C'$ и $C'\sigma C$. Подставляя значение χ' из первого равенства во второе, получаем $\chi=\chi\sigma'\sigma$, откуда в силу нормальности χ согласно предложению 1 $\sigma'\sigma\in G^1$. Легко проверяется, что если композиция мономорфизмов обратима, то сами мономорфизмы обратимы.

Подобъект CwW называется *инвариантным* относительно эндоморфизма $W\omega W$, если w перестановочен с ω, т. е. $w\omega=\gamma w$ при подходящем эндоморфизме γ объекта C.

Предложение 3. *Морфизм $A\chi C$ нормален в AuW тогда и только тогда, когда существует G^u-инвариантный подобъект CwW такой, что $u=\chi w$.*

По определению, если χ нормально в u, то морфизмы из множества частных $\chi\setminus u$ отличаются на автоморфизм объекта C, т. е. определяют единственный подобъект w объекта W, удовлетворяющий равенству $u=\chi w$. Из свойства единственности такого подобъекта следует его инвариантность относительно всех автоморфизмов из G^u.

Обратно, пусть для χ существует G^u-инвариантный подобъект $w\in\chi\setminus u$. Тогда в силу регулярности любого левого делителя в u для произвольного $w'\in\chi\setminus u$ имеем $w'=w\omega$ с $\omega\in G^u$. Ввиду G^u-инвариантности w при подходящем эндоморфизме $C\gamma C$ $\gamma w=w\omega$. Аналогично $w\omega^{-1}=\gamma'w$, причем $\gamma'=\gamma^{-1}$, ибо $\gamma'\gamma w=w$, $\gamma\gamma'w=w$.

Из доказанного в частности следует, что G^u-иварриантный подобъект $w\in\chi\setminus u$ определяется однозначно.

Из определения нормализации немедленно следует

Предложение 4. *Левый делитель $A\varphi B$ морфизма AuW имеет нормализацию в u тогда и только тогда, когда семейство всех G^u-инвариантных подобъектов $C'w'W$, ассоциированных с делящимися на φ и нормальными в u морфизмами $A\chi'C$, имеет наименьший элемент CwW. При этом нормализация φ в u представляется любым морфизмом $\chi\in u/w$.*

Теорема 1. *Для существования нормализации в морфизме AuW его левых делителей достаточно, чтобы в ординале (упорядоченном классе) $\mathbf{P}_u(W)$ подобъектов объекта W, содержащих подобъект u, были определены пересечения произвольных семейств G^u-инвариантных подобъектов.*

Поскольку семейство G^u-инвариантных подобъектов из $\mathbf{P}_u(W)$ не пусто (ибо содержит тотальный подобъект 1_W), доказательство теоремы 1 сводится к предложению 4 при условии, что

(i) для данного морфизма $A\varphi B$ пересечение CwW всех G^u-инвариантных подобъектов C_iw_iW, левые частные $\chi_i\in u/w_i$, по которым делятся на φ, само G^u-инвариантно;

(ii) $\chi\in u/w$ делится на φ.

G^u-инвариантность w следует из нижеприводимого общего утверждения.

Предложение 5. *Семейство $\mathrm{P}^G(W)$ подобъектов объекта W, инвариантных относительно действия заданной группы G автоморфизмов объекта W, замкнуто относительно пересечений и объединений подобъектов.*

Справедливость предложения 5 очевидна, если учесть, что при изотонном преобразовании класса подобъектов $\mathrm{P}(W)$ объекта W

$$\mathrm{P}(W)\,\omega_*\mathrm{P}(W), \qquad w\omega_* = w\omega,$$

ассоциированном с автоморфизмом $W\omega W$, образы пересечения и объединения подобъектов совпадают соответственно с пересечением и объединением их образов. Этот факт легко устанавливается с использованием отображения ω_*^{-1}.

Проверим, что χ делится на φ.

Для произвольного $v \in \varphi \setminus u$ и любого i имеем $\varphi\psi_i w_i = \varphi v$. В силу регулярности φ в u найдется автоморфизм $\omega_i \in G^u$ такой, что $v = \psi_i w_i \omega_i$. Подставляя это значение v в предыдущее равенство и используя нормальность χ_i в u, найдем автоморфизм γ_i, удовлетворяющий равенству $\gamma_i w_i = w_i\omega_i$. Значит $v = \psi_i\gamma_i w_i$, т. е. $v \leqslant w_i$ при всех i. Следовательно, $v \leqslant w$ и $v = \psi w$. Из равенств $\chi w = u = \varphi v = \varphi\psi w$ заключаем, что $\chi = \varphi\psi$.

Согласно предложению 5 в случае существования пересечений в ординале $\mathrm{P}_u(W)$ его подкласс $\mathrm{P}_u^G(W)$ при $G = G^u$ образует систему замыканий и нормализация любого левого делителя $A\varphi B$ морфизма AuW в u задается как $\chi \in u/w$, где w — замыкание произвольного подобъекта $v \in \varphi \setminus u$ в указанной системе замыканий.

Подобъекты CwW и $Cw'W$ называются *сопряженными*, если $w' = w\omega$, $\omega \in \mathrm{Aut}\, W$, и G-сопряженными, если ω принадлежит подгруппе G группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, W$.

Предложение 6. *Если кратный $A\varphi B$ морфизм $A\chi C$ нормален в AuW, то любой морфизм $v \in \varphi \setminus u$ делится на каждый морфизм $w \in \chi \setminus u$.*

Пусть $\psi \in \varphi \setminus \chi$. Тогда $u = \varphi v = \varphi\psi w$ и по регулярности φ в u имеем $v = \psi w\omega$ с $\omega \in G^u$. В силу нормальности χ в u существует автоморфизм γ такой, что $w\omega = \gamma w$. Поэтому $v = \psi\gamma w$.

Следствие. *Подобъект w содержит объединение всех подобъектов $v \in \varphi \setminus u$, которые в силу регулярности φ в u сопряжены друг к другу.*

Предложение 7. *Объединение w всех подобъектов $v \in \varphi \setminus u$ определяет морфизмы $\chi \in u/w$, нормальные в u.*

Согласно предложению 3 достаточно показать, что подобъект w G^u-инвариантен. Так как все подобъекты $v \in \varphi \setminus u$ G^u-сопряжены, $w = \bigcup_{\omega' \in G^u} v\omega'$ и для любого $\omega \in G^u$, имеем

$$w\omega_* = \bigcup_{\omega' \in G^u} (v\omega')\omega_* = w.$$

Теорема 2. *Нормализация в морфизме* AuW *его произвольного левого делителя существует, если* $P_u(W)$ — *полная решетка относительно объединений.*

К соотношению теорем 1 и 2 заметим, что поскольку ординал $P_u(W)$ имеет наименьший элемент u и наибольший элемент 1_W, следующие условия для него эквивалентны:

/i/ $P_u(W)$ — полная решетка по пересечениям;

/ii/ $P_u(W)$ — полная решетка по объединениям;

/iii/ $P_u(W)$ — полная решетка.

В случае, когда ординал $P_u(W)$ — конечный (в частности, если конечна изотропная группа G^u), слово „полная" не несет нагрузки.

Укажем одно применение нормализаций.

Теорема 3. *Если* $A\chi C$ — *нормализация* $A\varphi B$ *в* AuW *и* ψ — *произвольный элемент* $\varphi \setminus \chi$, *то степень сепарабельности морфизма* φ *в* u *равна индексу изотропной группы* G^ψ *в изотропной группе* G^χ: $\operatorname{sep}_u \varphi = (G^\chi : G^\psi)$.

По определению степень сепарабельности φ в u равна мощности множества левых частных $\varphi \setminus u$. Зафиксируем некоторый морфизм $w \in \chi \setminus u$. Ввиду регулярности φ в u для любого $v \in \varphi \setminus u$ существует автоморфизм $w \in G^u$ такой, что $v = \psi w \omega$. Морфизм w перестановочен с ω в силу нормальности χ в u, так что $w\omega = \gamma w$ с $\gamma \in \operatorname{Aut} C$. Поэтому множество $\varphi \setminus u$ исчерпывается морфизмами $\psi\gamma w$, где вследствие мономорфности w $\gamma \in G^\chi$. Для того, чтобы указанные композиции были попарно различны, необходимо и достаточно, чтобы γ пробегало множество левых классов смежности $G^\psi \setminus G^\chi$.

Следствие. *Степень сепарабельности нормального морфизма равна мощности его изотропной группы.*

Конструкция нормализации полезна и в двойственной ситуации, когда вместо мономорфизмов рассматриваются эпиморфизмы категории.

Ереванский государственный университет

Ս. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ

Մոնոմորֆիզմի նորմալացումը ընդհանուր կատեգորիաներում

Ընդհանուր կատեգորիաներում ներմուծվում է մոնոմորֆիզմի նորմալացման հասկացությունը, ստացվում են նրա գոյության բավարար պայմանները։ Ապացուցվում է, որ $A\varphi B$ մոնոմորֆիզմի սեպարաբելության աստիճանը $A\alpha W$ մոնոմորֆիզմում հավասար է $\varphi \in \psi$ մոնոմորֆիզմի իզոտրոպ խմբի ինդեքսին φ-ի $A\gamma C$ նորմալացման իզոտրոպ խմբում։

ЛИТЕРАТУРА - ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Далалян*, Изв. АН Армении. Математика, т. 28, № 4 (1992). [2] *С. Г. Далалян*, Изв. АН Армении. Математика, т. [illegible], № 6 (1992).