ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 519.22

М. С. Гиновян

Асимптотические свойства оценок спектра однородного гауссовского поля

(Представлено академиком НАН Армении Р. В. Амбарцумяном 10/VIII 1993)

1. *Введение*. Пусть $X(u)$, $u=(u_1, \dots, u_n)\in U$ — однородное гауссовское случайное поле со средним нуль и спектральной плотностью (с. п.) $f(\lambda)=f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, т. е.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}X(u)=0 \\
&\mathrm{E}X(u)X(v)=r(u-v)=\int e^{i(u-v,\lambda)}f(\lambda)\,d\lambda,\quad u,\ v\in U.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь и далее $u-v=(u_1-v_1, \dots, u_n-v_n)$, $(u,\lambda)=u_1\lambda_1+\dots+u_n\lambda_n$, $n=1, 2, \dots$, $r(u)$ — корреляционная функция поля $X(u)$.

Мы будем рассматривать сразу два случая: случай дискретного параметра (д. п.), $U=\{u\colon u=(u_1, \dots, u_n),\ u_k=0, \pm1, \dots, k=\overline{1, n}\}$ и случай непрерывного параметра (н. п.), $U=R_n$.

В случае н. п. будем дополнительно предполагать, что поле $X(u)$, $u\in U$, измеримо и среднеквадратически непрерывно. Интегрирование в (1), как и во всех интегралах с опущенными пределами, ведется по множеству $Q_n=[-\pi, \pi]^n=\{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n),\ -\pi\leqslant\lambda_k<\pi,\ k=\overline{1, n}\}$ в случае д. п. и по R_n в случае н. п.

Спектр поля $X(u)$ характеризуется линейным функционалом $L(f)$ (см. [1,2]):

$$
L(f)=\int\varphi(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda \tag{2}
$$

где $\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ некоторая интегрируемая функция.

Заметим, что если $\varphi(\lambda)$ является индикатором n-мерного интервала $[-\pi, \mu_1]\times\dots\times[-\pi, \mu_n]$, то $L(f)=F(\mu)$, $\mu=(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $F(\mu)$ — спектральная функция поля $X(u)$, а если $\varphi(\lambda)=\exp\{i(\lambda, u)\}$, то $L(f)=r(u)$.

Известной оценкой для функционала $L(f)$ является статистика L_T (см. ([2,3])):

$$L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda) d\lambda \tag{3}$$

где $I_T(\lambda)$ — периодограмма, построенная по выборке $\{X(u),\ 0 < u_k < T_k,\ k=\overline{1, n}\}$ объема $T = (T_1, \ldots, T_n)$, т. е.

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} X(u) e^{-i(\lambda, u)} \right|^2 \quad \text{в случае д. п.}$$

и

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \left| \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} X(u) e^{-i(\lambda, u)} \right|^2 \quad \text{в случае н. п.,}$$

$$|T| = T_1 \cdot \ldots \cdot T_n .$$

В данной заметке исследуются асимптотические (при неограниченно возрастающем объеме выборки) свойства статистики L_T. Указываются достаточные условия на функции $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, при которых: 1) L_T является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала $L(f)$ и 2) L_T имеет асимптотически нормальное распределение. Выясняется также скорость сходимости к нулю смещения $K_T = E(L_T) - L(f)$.

Заметим, что все указанные свойства оценки L_T выводятся из приводимой ниже теоремы 1 об асимптотическом поведении следа произведения теплицевых операторов, являющейся многомерным аналогом теоремы Ф. Аврама ([4]).

Заметим также, что статистика L_T допускает спектральное представление (см. ([5,6])):

$$L_T = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \iiint G_T(\lambda, u) G_T(u, \mu) \varphi(u)\, du Z(d\lambda) Z(d\mu), \tag{4}$$

где

$$G_T(\lambda, \mu) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(\lambda_k, \mu_k), \tag{5}$$

$$G_{T_k}(\lambda_k, \mu_k) = \sum_{v=1}^{T_k} e^{iv(\lambda_k - \mu_k)} \quad \text{в случае д. п.} \tag{6}$$

$$G_{T_k}(\lambda_k, \mu_k) = \int_0^{T_k} e^{iu(\lambda_k - \mu_k)} du \quad \text{в случае н. п.} \tag{7}$$

и $Z(d\lambda)$ — стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении поля $X(u)$:

$$X(u) = \int e^{i(\lambda, u)} Z(d\lambda).$$

2. *Теплицевы операторы*. Пусть

$$L_p = L_p(J_n) = \left\{ f \colon \|f\|_p = \left(\int\limits_{J_n} |f(\lambda)|^p \, d\lambda \right)^{1/p} < \infty \right\} 1 \leqslant p < \infty,$$

$$L_\infty = L_\infty(J_n) = \{ f \colon \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\lambda |f(\lambda)| < \infty \}.$$

Обозначим через P_T интегральный оператор в $L_2(Q_n)$ с ядром (5), (6), и через $\tilde{P}_T$ — интегральный оператор в $L_2(R_n)$ с ядром (5), (7). Заметим, что P_T является ортопроектором в $L_2(Q_n)$ на подпространство тригонометрических полиномов от n-переменных степени $\leqslant T = (T_1, \ldots, T_n)$, а $\tilde{P}_T$ — ортопроектором в $L_2(R_n)$ на подпространство целых функций от n-переменных экспоненциального типа степени $\leqslant T = (T_1, \ldots, T_n)$, сужение которых на R_n принадлежит $L_p(R_n)$.

Для функций $\psi(\lambda) \in L_1(Q_n)$ и $\tilde{\psi}(\lambda) \in L_1(R_n)$ определим усеченные теплицевы операторы:

$$A_T(\psi) = P_T \psi P_T \quad \text{и} \quad \tilde{A}_T(\tilde{\psi}) = \tilde{P}_T \tilde{\psi} \tilde{P}_T.$$

В случае д. п. имеет место следующий n-мерный аналог теоремы Ф. Аврама ([4]).

Теорема 1. *Пусть* $\psi_k(\lambda) \in L_{p_k}(Q_n)$, $1 \leqslant p_k < \infty$, $k = \overline{1, m}$. *Тогда*

а) *если* $\nu = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k^{-1} \leqslant 1$, *то*

$$\lim_{|T| \to \infty} \frac{1}{|T|} \operatorname{tr} \left[\prod_{k=1}^{m} A_T(\psi_k) \right] = (2\pi)^{n(m-1)} \int\limits_{Q_n} \prod_{k=1}^{m} \psi_k(\lambda) \, d\lambda;$$

б) *если* $\alpha > 1$ и $\alpha \geqslant \nu$, *то*

$$\lim_{|T| \to \infty} \frac{1}{|T|^\alpha} \operatorname{tr} \left[\prod_{k=1}^{m} A_T(\psi_k) \right] = 0.$$

Здесь и далее $\operatorname{tr}[A]$ обозначает след оператора A, а запись $|T| \to \infty$ означает, что $T_k \to \infty$ для всех $k = \overline{1, n}$.

В случае н. п. имеет место аналогичный результат с заменой $A_T(\psi)$ и Q_n на $\tilde{A}_T(\tilde{\psi})$ и R_n соответственно. Далее также мы приводим формулировки результатов только в случае д. п., в случае н. п. верны аналогичные результаты с соответствующими изменениями формулировок.

Основным аппаратом, сводящим исследование асимптотических свойств статистики L_T к теореме 1, является следующая хорошо известная формула: (см. ([8, 4]));

$$\chi_s = 2^{s-1}(s-1)!\,\frac{\operatorname{tr}[A_T(f)\,A_T(\varphi)]^s}{|T|^{s/2}}, \tag{8}$$

где $\chi_s = \operatorname{cum}_s(L_T)$ обозначает s-й семивариант величины L_T.

3. *Асимптотические свойства оценки* L_T. Из теоремы 1 с учетом формулы (8) легко выводится следующая

Теорема 2. *Пусть* $f(\lambda) \in L_{p_1}$, $\varphi(\lambda) \in L_{p_2}$, $1 \leqslant p_1$, $p_2 \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} \leqslant 1$. *Тогда* L_T *является асимптотически несмещенной оценкой для* $L(f)$, *т. е.*

$$\lim_{|T|\to\infty} \mathrm{E}(L_T) = L(f) \tag{9}$$

Заметим, что теорема 2 ранее другим методом была установлена в [1,2].

Накладывая дополнительные ограничения на функции $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ можно оценить скорость сходимости в (9). Приведем один результат такого характера. Будем говорить, что функция $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ принадлежит классу Липшица $\operatorname{Lip}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ p)$, $(0 < \alpha_k \leqslant 1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ k = \overline{1, n})$, если

$$\omega_p(\psi;\ \delta_1, \ldots, \delta_n) \leqslant C \cdot \sum_{k=1}^{n} \delta_k^{\alpha_k}, \quad \delta_k > 0,$$

где

$$\omega_p(\psi;\ \delta_1, \ldots, \delta_n) = \sup_{\substack{|h_k| < \delta_k \\ k = \overline{1, n}}} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_p$$

модуль непрерывности функции $\psi(\lambda)$ в L_p.

Теорема 3. *Пусть* $f(\lambda) \in \operatorname{Lip}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ p)$, $\varphi(\lambda) \in \operatorname{Lip}(\beta_1, \ldots, \beta_n;\ q)$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $0 < \alpha_j, \beta_j \leqslant 1$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда*

$$|K_T| \leqslant \begin{cases} C \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} T_k^{-(\alpha_k + \beta_k)}, & \text{если } \alpha_k + \beta_k < 1 \\ C \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} T_k^{-1} \ln T_k, & \text{если } \alpha_k + \beta_k = 1 \end{cases}$$

где $K_T = \mathrm{E}(L_T) - L(f)$.

Следующая теорема дает представление об асимптотике дисперсии оценки L_T.

Теорема 4. *Пусть* $f(\lambda) \in L_{p_1}$, $\varphi(\lambda) \in L_{p_2}$, $1 \leqslant p_1$, $p_2 \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. *Тогда*

$$\lim_{|T|\to\infty} |T|\,\mathrm{E}(L_T - \mathrm{E}(L_T))^2 = (2\pi)^n \int f^2(\lambda)\,\varphi^2(\lambda)\,d\lambda$$

Из теорем 2 и 4 получаем:

Теорема 5. *В условиях теорем 4 L_T является среднеквадратически состоятельной оценкой для $L(f)$, т. е.*

$$\lim_{|T|\to\infty} \mathrm{E}(L_T - L(f))^2 = 0.$$

Теорема 6. *В условиях теоремы 4 статистика L_T имеет асимптотически $N(0, \sigma^2)$ нормальное распределение, т. е.*

$$\sqrt{|T|}\,(L_T - \mathrm{E}(L_T)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2), \quad |T| \to \infty,$$

где

$$\sigma^2 = (2\pi)^n \int f^2(\lambda)\,\varphi^2(\lambda)\,d\lambda.$$

Привлекая известные теоремы вложения классов Липшица, Бесова и Никольского в класс L_p (см. [8, 9]), можно получить „локальные" достаточные условия для асимптотических свойств оценки L_T. Приведем соответствующий результат только для классов Липшица $\mathrm{Lip}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; p)$.

Теорема 7. *Если в условиях теоремы 3 $\bar\alpha + \bar\beta > \frac{1}{2}$, где $\bar\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{-1}\right)^{-1}$, $\bar\beta = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{-1}\right)^{-1}$, то утверждения теорем 4–6 остаются справедливыми.*

Замечание. Для случайных процессов ($n = 1$) в [5–7] было установлено, что при условии $\bar\alpha + \bar\beta > \frac{1}{2}$ статистика L_T является асимптотически нормальной оценкой для функционала $L(f)$, т. е. $\sqrt{|T|}\,(L_T - L(f)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$, $|T| \to \infty$. Для случайных полей аналогичное утверждение не верно, так как в этом случае случайные величины $\sqrt{|T|}\,(L_T - \mathrm{E}(L_T))$ и $\sqrt{|T|}\,(L_T - L(f))$ имеют различные асимптотические распределения.

Институт математики
Национальной академии наук Армении

Մ. Ս. ԳԻՆՈՎՅԱՆ

Համասեռ Գաուսյան պատահական դաշտի սպեկտրի գնահատականների ասիմպտոտիկ հատկությունները

Դիցուք $X(u)$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$, զրոյական միջինով և $f(\lambda) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ սպեկտրալ խտությամբ համասեռ գաուսյան պատահական դաշտ է։ Այս դաշտի սպեկտրը բնութագրվում է $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\,d\lambda$

գծային ֆունկցիոնալով, որտեղ $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ինչ-որ հանրագումարելի ֆունկցիա է։ Հոդվածում, որպես $L(f)$ ֆունկցիոնալի գնահատական, դիտարկվում է $L_T = \int \varphi(\lambda) I_T(\lambda) d\lambda$ ստատիստիկան, որտեղ՝ $I_T(\lambda)$-ն $X(u)$ դաշտի պերիոդագրաման է։ Հետազոտվում է L_T-ի ասիմպտոտիկ հատկությունները։ Բերված են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում L_T-ն հանդիսանում է ասիմպտոտիկ անշեղելի և միջին քառակուսային իմաստով ունակ գնահատական $L(f)$-ի համար։ Հետազոտվում է նաև $K_T = E(L_T) - L(f)$ շեղման զրոյին ձգտելու արագությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Р. Бенткус и др., Литовский мат. сб., т. 13, № 1 (1974). [2] *Р. Бенткус* и др., Литовский мат. сб., т. 14, № 3 (1974). [3] *И. А. Ибрагимов*, Теория вероятностей и ее применения, т. 8, № 4 (1963). [4] *F. Avram*, Probability Theory and Related Fields, v. 79, № 1 (1988). [5] *М. С. Гиновян*, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, № 2 (1988). [6] *М. С. Гиновян*, Теория вероятностей и ее применения, т. 33, № 4 (1988). [7] *М. С. Гиновян*, ДАН АрмССР, т. 89, № 1 (1989). [8] *В. Н. Коляда*, Мат. сб., т. 127 (109), № 3 (1985). [9] *С. М. Никольский*, Приближение функции многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1977.