

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белусеян, Л. Р. Мкртчян

К вопросу учета поперечных сдвигов и инерции вращения
в задаче свободных колебаний пластины

(Представлено академиком НАН Армении С. А. Амбарцумяном 30/IV 1993)

В работе ⁽¹⁾ приведено точное решение задачи о свободных колебаниях толстой свободно опертой прямоугольной изотропной пластины. Выполнены расчеты на ЭЦВМ для ряда собственных значений и распределения напряжений, которые в табличной форме сравниваются с результатами уточненной теории пластин типа Тимошенко и с результатами классической теории.

В настоящей работе точное решение данной задачи представляется в виде двойных тригонометрических рядов Фурье с помощью двух неизвестных функций, что значительно облегчает дальнейшие выкладки. Приводится аналитическое сравнение уточненного уравнения С. А. Амбарцумяна с уравнением, полученным из точного решения путем предельного перехода, а также с уравнением теорий типа Тимошенко при различных вариантах функции, определяющей характер изменения напряжений поперечного сдвига по толщине пластинки.

1. Задача о свободных колебаниях толстой изотропной прямоугольной пластины решается с помощью двойных тригонометрических рядов Фурье. Пусть на боковых гранях пластины заданы граничные условия типа Навье, которые, например, для краев $x=0$, а имеют вид

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \sigma_x = 0. \quad (1)$$

Для приближенных теорий в случае тонких пластин эти условия приводят к свободному опиранию по контурным линиям срединной плоскости ($z=0$)

$$w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad M_x = 0,$$

где w и v перемещения срединной плоскости.

Искомые перемещения представляются в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega t} g_{mn}(z) \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ u_y &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega t} g_{mn}(z) \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ u_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega t} f_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (2)$$

где a и b размеры пластины. Неизвестные функции $g_{mn}(z)$ и $f_{mn}(z)$, входящие в выражения (2) для фиксированных m и n , будем искать в виде

$$\begin{aligned} g(z) &= A_i e^{\beta_i z}; \\ f(z) &= B_i e^{\beta_i z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для простоты записи здесь и далее индексы m и n пропустим. Подставляя выражения перемещений (2) с учетом (3) в уравнения движения в перемещениях

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

из условия существования нетривиального решения системы, для β_i получаем

$$\beta_{1,2} = \pm M \sqrt{1 - \gamma_1}, \quad \beta_{3,4} = \pm M \sqrt{1 - \gamma_2}, \quad (4)$$

где

$$M^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \gamma_1 = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu) M^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu M^2}.$$

Тогда для функций $g(z)$ и $f(z)$ имеем

$$\begin{aligned} g(z) &= - \frac{B_1}{\beta_1} \operatorname{ch} \beta_1 z + A_3 \operatorname{ch} \beta_1 z - \frac{B_1}{\beta_1} \operatorname{sh} \beta_1 z + A_4 \operatorname{sh} \beta_1 z; \\ f(z) &= B_2 \operatorname{sh} \beta_1 z - \frac{M^2 A_3}{\beta_2} \operatorname{sh} \beta_2 z + B_1 \operatorname{ch} \beta_1 z - \frac{M^2 A_4}{\beta_4} \operatorname{ch} \beta_2 z. \end{aligned} \quad (5)$$

В решениях (5) B_1, B_2, A_3, A_4 являются произвольными постоянными. При свободных колебаниях полагаем, что лицевые плоскости пластины свободны от напряжений

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \text{при } z = \pm h/2. \quad (6)$$

Возьмем отдельно симметричную и антисимметричную относительно перемещения u_z части решений. Удовлетворяя поверхностным условиям (6), получим соответственно следующие уравнения для определения частоты колебаний:

$$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\eta_1}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\eta_2}\right)} = \frac{4\sqrt{1-\eta_1}\sqrt{1-\eta_2}}{(2-\eta_2)^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\eta_1}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{hM}{2}\sqrt{1-\eta_2}\right)} = \frac{(2-\eta_2)^2}{4\sqrt{1-\eta_1}\sqrt{1-\eta_2}}. \quad (8)$$

Займемся уравнением (7) и рассмотрим предельные случаи.

а) Пусть толщина пластины очень мала по сравнению с другими размерами: $hM \rightarrow 0$ и пусть $\eta_1 < \eta_2 < 1$. Разлагая гиперболические тангенсы в ряд и сохраняя лишь три члена ряда, после некоторых преобразований получим

$$\omega^2 = \frac{\mu h^2 M^4}{3\rho} \left[1 - \frac{\nu}{\nu + 2\mu} \right]. \quad (9)$$

Восстановим уравнение, которому соответствует частота ω^2 , выраженная через (9):.

$$D\Delta^2 w = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

которое оказывается уравнением классической теории колебания тонких пластин.

Далее, сохраняя в разложении гиперболических тангенсов еще несколько членов малости высшего порядка, а затем восстанавливая уравнение, которому соответствует данное решение, окончательно получаем

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3(1+\nu)}{12(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w - \\ - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho^2 h^3}{12(1-\nu)E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^4} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (10) видно, что при пренебрежении последним членом получается уравнение движения классической теории пластин с учетом инерции вращения. В целом же это уравнение должно соответствовать какой-либо уточненной теории.

Однако в восстановленном уравнении (10) знак последнего члена приводит к качественному различию с известными ранее уравнениями каких-либо уточненных теорий. Отсюда следует, что восстановленные уравнения с сохранением следующих слагаемых в разложении характеристического уравнения не всегда приводят к ранее известным уточненным теориям.

б) Рассмотрим коротковолновое приближение $hM \rightarrow \infty$. В этом случае из (7) получим уравнение, характеризующее волны Рэлея:

$$(2 - \eta_2)^2 = 4 \sqrt{1 - \eta_2} \sqrt{1 - \eta_1}, \quad \text{где } \eta = \eta_1/\eta_2$$

2. Рассмотрим уточненную теорию пластин С. А. Амбарцумяна, (3.3), которая учитывает поперечные сдвиги следующим образом

$$\tau_{xz} = f(z) \varphi(x, y, t), \quad \tau_{yz} = f(z) \psi(x, y, t),$$

где функция $f(z)$ определяет характер изменения напряжений поперечного сдвига по толщине пластинки.

Уравнение колебаний по этой уточненной теории пластин имеет вид (3.4):

$$D \Delta^2 w + 2\epsilon h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\epsilon h^3}{3} \left[1 + \frac{6M}{(1-\nu)h^2 I_0} \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + \frac{4(1+\nu)\epsilon^2 h M}{E I_0} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (11)$$

где

$$M = \int_{-h}^h z J(z) dz, \quad J(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi, \quad I_0 = \int_{-h}^h f(z) dz.$$

Так как в целом сравнение уравнения (11) с уравнением, полученным из точного решения (10), невозможно (уравнение (11)—гиперболического типа, а уравнение (10)—нет), то возьмем различные варианты функции $f(z)$ и посмотрим, в каких случаях коэффициенты при третьих членах (члены, учитывающие инерцию вращения) в этих уравнениях совпадают.

$$а) \quad f(z) = 1 - z^2/h^2 \quad (M/I_0 = 2h^2/5). \quad (12)$$

Получим, что для того, чтобы члены, учитывающие инерцию вращения в приближенном уравнении (11) и в уравнении (10), совпадали, необходимо, чтобы коэффициент Пуассона был бы равен 1, 2, т. е. $\nu = 1,2$; чего не может быть в сплошной изотропной среде вообще. Отсюда можем заключить, что при функции $f(z)$, выраженной формулой (12), эти члены не совпадают.

$$б) \quad f(z) = 1 - |z|/h \quad (M/I_0 = 5h^2/12). \quad (13)$$

В этом случае для коэффициента Пуассона получаем $\nu = 1,25$, чего также в реальности не существует ($0 < \nu < 0,5$).

$$в) \quad f(z) = 1 - a_1 \frac{|z|}{h} - a_2 \frac{z^2}{h^2}, \quad a_1 + a_2 = 1. \quad (14)$$

В этом случае для соотношения M_0/I_0 имеем

$$\frac{M}{I_0} = \frac{40 - 15a_1 - 8a_2}{20(6 - 3a_1 - 2a_2)} h^3 = \frac{32 - 7a_1}{20(4 - a_1)} h^3.$$

Сравнивая уравнения (10) и (11), получим:

$$a_1 = \frac{135 - 41\nu}{31 - 10\nu}, \quad a_2 = 1 - \nu.$$

Попробуем аналитически сравнить уравнение (11) уточненной теории С. А. Амбарцумяна, с уравнением уточненной теории типа Тимошенко.

И. Т. Селезов, исходя из метода степенных рядов, нашел в (4), выражение для коэффициента сдвига, которое соответствует аппроксимации Тимошенко

$$\beta^2 = 2(2 - \nu + \sqrt{0.5 + \nu^2})^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Формула (15) получена из сравнения для изгибной волны характеристики, соответствующей уравнению теорий типа Тимошенко

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[1 + \frac{2}{\beta^2(1 - \nu)} \right] \frac{2h^3}{15} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta^2 w + \\ + \frac{4(1 + \nu)\rho^2 h^3}{3\beta^2 E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (16)$$

и характеристики, соответствующей уточненному уравнению, полученному из трехмерных уравнений динамической теории упругости, как их двухмодовая аппроксимация (5).

Возьмем различные рассмотренные варианты функции $f(z)$ (12), (13), (14) и сравним приближенное уравнение (11) уточненной теории С. А. Амбарцумяна с аппроксимацией Тимошенко (16) с учетом выражения коэффициента сдвига (15), полученного И. Т. Селезовым.

а) Требуя, чтобы в уравнениях (11) и (16) коэффициенты при всех соответствующих членах были равны, для коэффициента сдвига получим $\beta^2 = 5/6$. Но, с другой стороны, для β^2 имеем также выражение (15). Это означает, что при данной функции $f(z)$ для того, чтобы уточненные уравнения (11) и (16) совпадали, необходимо, чтобы коэффициент Пуассона был равен $\nu = 0.425$.

б) В этом случае для коэффициента сдвига получается $\beta^2 = 4/5$. И так же, как и в предыдущем случае, уравнения (11) и (16) совпадают лишь при определенном значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$.

в) В этом случае для коэффициента сдвига имеем

$$\beta^2 = \frac{20(4 - a_1)}{3(32 - 7a_1)}.$$

Для того, чтобы уравнения (11) и (15) совпадали, необходимо, чтобы

$$a_1 = \frac{16 + 40(\nu - \sqrt{0.5 + \nu^2})}{1 + 10(\nu - \sqrt{0.5 + \nu^2})},$$

где знаменатель в выражении a_1 не равняется нулю при всех реальных значениях ν . Отсюда следует, что при соответствующем выборе коэф-

фицентов a_1 и a_2 всегда можно найти такие функции $f(z)$, при которых приближенные уравнения совпадают при всех реальных значениях коэффициента Пуассона.

Институт механики

Национальной академии наук Армении

Մ. Վ. ԲՆԼՈՒՐՆԿՅԱՆ, Լ. Խ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Սալի ազատ տատանումների խնդրում ընդլայնական սահմանի և
պտտման իներցիայի հաշվառման հարցի շուրջը

Դիտարկված է իզոտրոպ հաստ ուղղանկյուն սալի ազատ տատանումների խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Բերված է Ս. Լ. Համբարձումյանի ճշգրտված հավասարման անալիտիկ համեմատությունը ճշգրիտ լուծումից սահմանային անցումով ստացված հավասարման հետ, ինչպես նաև Տիմոշենկոյի տիպի տեսության հավասարման հետ, ըստ սալի հաստության ընդլայնական սահմանի լարումների փոփոխման բնույթը բնորոշող ֆունկցիայի տարբեր դեպքերի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ S. Srinivas. C. V. Joga Rao, A. K. Rao, J. of Sound Vibr., v. 12, № 2, p. 187—199 (1970). ² С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, Наука М., 1987. ³ С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, Наука, М., 1974. ⁴ И. Г. Селезов, Прикл. механика, т. 6, № 3, с. 319—327, (1960). ⁵ Э. И. Григолюк, И. Г. Селезов, Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел, Наука, М., 1973.