ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Г. В. Вирабян

О спектральных свойствах операторных пучков, порожденных известным примером Бицадзе

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 6/IV 1993)

1. Пусть Ω означает конечную часть плоскости переменных x и y, ограниченную единичной окружностью $\partial\Omega$: $x^2+y^2-1=0$, с центром в начале координат. В области Ω рассмотрим следующую спектральную задачу Дирихле на собственные значения

$$A\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial x^2}+2\mu B\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial x\partial y}+\mu^2 C\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial y^2}=\widehat{0}, \tag{1}$$

$$\widehat{w}|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где μ — спектральный параметр, а A, B и C — квадратные матрицы, заданные по формулам

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$\widehat{w}(x,y)=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}$ — искомая действительная вектор-функция.

Лемма 1. *При всех положительных значениях параметра $\mu\in R_1$ система* (1) *является сильно связанной, а для остальных значений μ — слабо связанной эллиптической системой в смысле Бицадзе* (1).

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{4}$$

систему (1) можно представить в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial\bar z}+\lambda^2\frac{\partial^2 w}{\partial \bar z^2}=0, \tag{5}$$

где $w = u + iv$ — искомая функция, а $\lambda = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$. При $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, т. е. при $\mu = \pm 1$, система (5) превращается соответственно в известное уравнение Бицадзе ([1]) или ее сопряжение.

В дальнейшем нам удобно записать систему уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} \square_\mu u = \mu \Diamond v, \\ \square_\mu v = -\mu \Diamond u, \end{cases} \qquad (Б_\mu)$$

где $\square_\mu = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu^2 \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор колебания струны. $\Diamond = 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Одновременно будем рассматривать тесно связанную с системой $(Б_\mu)$ систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{cases} \qquad (C-R)_\mu$$

которая при $\mu = 1$, т. е. для уравнения Бицадзе, превращается в систему Коши—Римана из теории аналитических функций.

Определение 1. *Пара функций, удовлетворяющих системе* $(Б_\mu)$ *или* $(C-R)_\mu$, *называется* μ-*сопряженной.*

Лемма 2. *Общее решение системы* $(Б_\mu)$ *в* Ω *имеет вид*

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= x\varphi_1(x, y; \mu) + \frac{y}{\mu}\varphi_2(x, y; \mu) + \psi_1(x, y; \mu), \\ v_\mu(x, y) &= x\varphi_2(x, y; \mu) - \frac{y}{\mu}\varphi_1(x, y; \mu) + \psi_2(x, y; \mu), \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\varphi_1(x, y; \mu)$, $\varphi_2(x, y; \mu)$ *и* $\psi_1(x, y; \mu)$, $\psi_2(x, y; \mu)$ — *произвольные* μ-*сопряженные решения системы* $(C-R)_\mu$.

2. Краевую задачу (1), (2) запишем в операторной форме. Применяя с обеих сторон уравнений системы $(Б_\mu)$ оператор Δ^{-1}, обратный к оператору Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ при нулевых краевых условиях (2), получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (I - N_1) u - \mu^2 N_1 u = \mu N_2 v, \\ (I - N_1) v - \mu^2 N_1 v = -\mu N_2 u, \end{cases} \qquad (7)$$

или же записанный в матричной форме квадратичный операторный пучок

$$L_\mu(\widehat{w}) = (\mathrm{I} - \widehat{N}_1)\widehat{w} + \mu_2 \widehat{N}_2 \widehat{w} + \mu^2 \widehat{N}_1 \widehat{w} = \widehat{0}, \qquad (B_\mu)$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathrm{H} = \mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Здесь

$$\widehat{N}_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -N_2 \\ N_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

$N_1 = \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $N_2 = \Delta^{-1} \circ$ — линейные ограниченные самосопряженные операторы типа С. Л. Соболева [3,4], действующие в соболевском-гильбертовом пространстве $h = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — функций, обобщенные производные которых суммируемы с квадратом в Ω и исчезающих на границе $\partial\Omega$ в смысле теорем вложении С. Л. Соболева, I—единичный в h оператор.

Определение 2. *Собственные значения и собственные функции квадратичного пучка L_μ будем соответственно называть собственными значениями и собственными функциями краевой задачи* (1), (2).

В пространстве h введем оператор G, действующий согласно формуле

$$G\varphi(x, y) = \varphi\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right). \tag{9}$$

Легко проверить, что оператор G сохраняет граничное условие (2) и $G^2 = I$.

Лемма 3. *Между операторами типа С. Л. Соболева* N_1 *и* N_2 *имеет место следующее соотношение*

$$N_2 + 2GN_1G = I. \tag{10}$$

Пользуясь соотношением (10), квадратичный пучок L_μ можно представить в виде

$$L_\mu(\widehat{w}) = (\widehat{I} - \widehat{N}_1)\widehat{w} + \mu(\widehat{I} - 2\widehat{G}\widehat{N}_1\widehat{G})\widehat{w} + \mu^2\widehat{N}_1\widehat{w} = \widehat{0}, \tag{B'_λ}$$

где $\widehat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$. Отсюда видно, что спектральные свойства квадратичного пучка L_μ и, следовательно, краевой задачи (1), (2) вполне определяются свойствами лишь одного оператора С. Л. Соболева $N_1 = \Delta^{-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3. Для дальнейшего необходимо установить также некоторые вспомогательные факты. Общее решение (6) системы $(Б_\lambda)$ можно записать в векторной форме

$$\widehat{w}_\mu(x, y) = A_\mu(x, y)\widehat{\varphi}_\mu(x, y) + \widehat{\psi}_\mu(x, y), \tag{6'}$$

где

$$\widehat{w}_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} u_\mu(x, y) \\ v_\mu(x, y) \end{pmatrix}, \qquad \widehat{\varphi}_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y; \mu) \\ \varphi_2(x, y; \mu) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\psi}_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y; \mu) \\ \psi_2(x, y; \mu) \end{pmatrix}.$$

а матрица-функция $A_\mu(x, y)$ имеет вид

$$A_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} x & \frac{y}{\mu} \\ -\frac{y}{\mu} & x \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Наряду с матрицей $A_\mu(x, y)$ рассмотрим матрицу

$$B_\mu(x, y) = \begin{pmatrix} x & -\frac{y}{\mu} \\ \frac{y}{\mu} & x \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Лемма 4. *Матрица $B_\mu(x, y)$ преобразует произвольную μ-сопряженную пару решений системы $(C-R)_\mu$ в μ-сопряженную пару решений той же системы.*

Лемма 5. *Функции вида*

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2}\right)\Phi_1(x, y) + \Psi_1(x, y), \\ v_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2}\right)\Phi_2(x, y) + \Psi_2(x, y), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ и $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$ — произвольные μ-сопряженные решения системы $(C-R)_\mu$, являются решениями системы $(Б_\mu)$.

Следствие. Из леммы 5 следует, что при $\mu = 1$ система функций

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= (x^2 + y^2)\Phi_1(x, y) + \Psi_1(x, y), \\ v_\mu(x, y) &= (x^2 + y^2)\Phi_2(x, y) + \Psi_2(x, y), \end{aligned} \tag{14}$$

где Φ_1, Φ_2 и Ψ_1, Ψ_2 — произвольные решения системы Коши—Римана, является решением системы Бицадзе $(Б_1)$

Пусть Ω_μ означает конечную часть плоскости x, y, ограниченную эллипсом $\partial\Omega_\mu$: $x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} = 1$. Обозначим через S_μ множество всех решений системы $(Б_\mu)$ вида (13), а через S_μ^0 — множество тех функций из S_μ, которые обращаются в нуль на границе $\partial\Omega_\mu$.

Лемма 6. *Если вектор-функция $\begin{pmatrix} u_\mu(x, y) \\ v_\mu(x, y) \end{pmatrix} \in S_\mu^0$, то она имеет вид*

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right)\Phi_1(x, y; \mu), \\ v_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right)\Phi_2(x, y; \mu), \end{aligned} \tag{15}$$

где Φ_1, Φ_2 μ-сопряженная пара решений системы $(C-R)_\mu$.

Лемма 7. *Общее решение системы* $(Б_\mu)$ *в* Ω *можно представить в виде*

$$\begin{aligned} u_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right)\Phi_1(x, y; \mu) + \Psi_1(x, y; \mu) + \\ &\quad + \Phi_1(0, 0)\,x + \Phi_2(0, 0)\,\frac{y}{\mu}, \\ v_\mu(x, y) &= \left(x^2 + \frac{y^2}{\mu^2} - 1\right)\Phi_2(x, y; \mu) + \Psi_2(x, y; \mu) + \\ &\quad + \Phi_2(0, 0)\,x - \Phi_1(0, 0)\,\frac{y}{\mu}, \end{aligned} \tag{16}$$

где Φ_1, Φ_2 *и* Ψ_1, Ψ_2 — *произвольные* μ-*сопряженные пары решений системы* $(C-R)_\mu$.

Следующее утверждение дополняет лемму 6 при $\mu = 1$.

Лемма 8. *Любое решение системы* $(Б_\mu)$, *удовлетворяющее граничному условию* (2), *при* $\mu = \pm 1$ *имеет вид* (15), *т. е. входит в множество* $S^0_{\pm 1}$.

4. Перейдем к формулировке основного результата данной работы.

Теорема. *Значения параметра* $\mu = \pm 1$ *для квадратичного пучка* L_μ *или для краевой задачи* (1), (2) *являются бесконечнократными собственными значениями, вся совокупность соответствующих собственных функций которых имеет вид*

$$\hat{w}(x, y) = \begin{pmatrix} w_1(x, y) \\ w_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 - 1)\,\varphi_1(x, y) \\ (x^2 + y^2 - 1)\,\varphi_2(x, y) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ — *произвольная отличная от тождественного нуля* μ-*сопряженная пара решений системы* $(C-R)$, *соответственно при* $\mu = \pm 1$, *а для всех остальных значений параметра* $\mu \in R_1$ *операторный пучок* L_μ *или краевая задача* (1), (2) *имеет лишь нулевое решение.*

Утверждение первой части теоремы содержится в лемме 8. Пусть $\mu > 0$, тогда в комплексной записи система (5) является слабо связанной, однако соответствующая сопряженная система уже является сильно связанной и поэтому согласно вышесказанному краевая задача (1), (2) и в этом случае имеет лишь нулевое решение.

Таким образом, операторный пучок L_μ, или, что то же самое, краевая задача (1), (2) при $\mu = \pm 1$ имеет собственные значения бесконечного ранга, заданные формулой (17), а все остальные значения параметра $\mu \in R_1$ являются регулярными точками спектра операторного пучка L_μ, т. е. соответствующая краевая задача (1), (2) имеет лишь нулевое решение.

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Բիցաձեի հայտնի օրինակից ծնված օպերատորային փնջերի սպեկտրալ հատկությունների մասին

Աշխատանքում երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար հետազոտվում է Դիրիխլեի սպեկտրալ խնդիրը, երբ տիրույթը միավոր շրջանն է, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում։ Դիտարկվող խնդիրը բերվում է քառակուսային օպերատորային փնջի սպեկտրի ուսումնասիրությանը, որի գործակիցները սոբոլևյան հիլբերտյան $W_2^1(\Omega)$ *տարածության մեջ գործող այսպես կոչված սոբոլևի տիպի օպերատորներ են։*

Ապացուցված է, որ այդ փնջի դիսկրետ սպեկտրը կենտրոնացված է $\lambda = \pm 1$ *կետերում, որոնք հանդիսանում են անվերջ պատիկության սեփական արժեքներ, իսկ դիտարկվող հավասարումը այդ դեպքում վեր է ածվում Բիցաձեի հայտնի հավասարմանը կամ նրա համալուծին։ Բացահայտ տեսքով կառուցված է* $\lambda = \pm 1$ *սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաների լրիվ հավաքը։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Бицадзе*, Краевые задачи для эллиптических уравнений втор[illegible] пор[illegible]ка. Наука, М., 1966. [2] *Н. Е. Товмасян*, Изв. АН АрмССР., Математика, т. 3. № 6 (1968). [3] *Р. А. Александрян*, Тр. ММО, т. 9, 1960. [4] *Г. В. Вирабян*, ДАН СССР, т. 150, № 1 (1963).