ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.597

Ф. А. Шамоян, М. А. Закарян

Некоторые вопросы представления в весовых пространствах гармоничных в шаре функций

(Представлено академиком НАН Армении М. М. Джрбашяном 5/III 1993)

1°. Пусть R^n — n-мерное евклидовое пространство, $B^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, |x| < 1\}$ единичный шар в R^n, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ обычная евклидовая норма, S^{n-1} — единичная сфера. Обозначим через $d\sigma_n(x)$ нормированную меру Лебега на B^n, через $h(B^n)$ — пространство всех гармонических в B^n функций, с обычной равномерной сходимостью внутри B^n. Пусть ω — неотрицательная функция класса $L^1(0, 1)$, $0 < p < +\infty$, введем в рассмотрение

$$h^p(\omega) \overset{\text{def}}{=} h^p(B^n, \omega) = \Big\{u \in h^p(B^n) : \|u\|^p_{h^p(\omega)} =$$

$$= \int\limits_{B^n} |u(x)|^p \omega(1 - |x|)\, d\sigma_n(x) < +\infty\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что пространство $h^p(\omega)$ при $p \geq 1$ относительно нормы $\|\cdot\|_{h^p(\omega)}$ является банаховым, а при $0 < p < 1$ относительно метрики $\|u - v\|^p_{h^p(\omega)}$, $h^p(\omega)$ превращается в F-пространство (см. [1]). Пространства типа $h^p(\omega)$ в случае голоморфных в круге функций и $\omega(t) = t^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$ впервые были введены и изучены в работах М. М. Джрбашяна [2, 3].

В этой заметке мы получим параметрическое представление классов $h^p(\omega)$ при $0 < p < +\infty$, найдем общий вид линейных непрерывных функционалов на этих пространствах посредством гармонических функций. Аналог этих результатов, в случаях анизотропных пространств голоморфных в полицилиндре функций, был получен первым автором в работах [4, 5].

Отметим также работы [6–8], где исследованы пространства гармонических функций типа $h^p(\omega)$ при $1 \leq p < +\infty$, $\omega(t) = t^\alpha$.

Для подробного ознакомления с данным вопросом следует обратиться к монографии (9).

2°. Символом S обозначим класс правильно-изменяющихся функций на $[0, 1]$, т. е. множество измеримых неотрицательных на $(0, 1)$ функций, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω, q_ω, причем m_ω, $q_\omega \in (0, 1)$, такие, что

$$m_\omega \leqslant \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leqslant M_\omega,$$

$r \in (0, 1)$, $\lambda \in [q_\omega; 1]$. Функции класса S, заданные на полуоси $(0; +\infty)$, подробно изучены в (10).

Если $\omega \in S$, то положим также

$$\alpha_\omega = \frac{\ln m_\omega}{\ln q_\omega}, \qquad \beta_\omega = \frac{\ln M_\omega}{\ln q_\omega}. \tag{1}$$

Здесь предположим, что $0 < \beta_\omega < 1$.

С целью изложения основных результатов заметки приведем также некоторые известные факты из теории гармонических в шаре функций (см. (11)).

Сферические гармоники называются сужением на S^{n-1} однородных гармонических многочленов степени k. Хорошо известно, что H_k — пространство сферических гармоник степени k и конечномерное пространство; ее размерность определяется из равенства

$$d_k = (2k + n - 2)\frac{(n + k - 3)!}{(n - 2)!\,k!}.$$

Ортонормальный базис в пространстве H_k обозначим через $\{Y_j^{(k)}\}_{j=1}^{d_k}$. Зональной гармоникой степени k называется функция

$$Z_{x'}^{(k)}(y') = \sum_{m=1}^{d_k} \overline{Y_m^{(k)}(x')}\, Y_m^{(k)}(y'). \tag{2}$$

Из свойств сферических гармоник следует, что для любой $u \in h(B^n)$ справедливо разложение

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k Y^{(k)}(x'), \quad x = rx', \quad r \in (0, 1), \quad x' \in S^{n-1}, \tag{3}$$

где

$$c_k Y^{(k)}(x') \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{d_k} c_k^{(j)} Y_j^{(k)}(x'). \tag{4}$$

При этом ряд сходится в пространстве $h(B^n)$.

Хорошо известно разложение ядра Пуассона

$$P(x, y') = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x - y'|^n}, \quad x \in B^n, \quad y' \in S^{n-1}$$

в виде ряда от зональных гармоник

$$P(x, y') = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k z_{y'}^k(x'). \tag{5}$$

Здесь ω_{n-1} площадь сферы S^{n-1}.

Пусть $-1 < \alpha < +\infty$, тогда определим интегродифференциальный оператор Римана—Лиувиля порядка α на пространстве $h(B^n)$. Предположим, что $u \in h(B^n)$ и u имеет разложение (3), тогда

$$D^\alpha u(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} c_k r^k Y^{(k)}(x'). \tag{6}$$

Для $x, y \in B^n$, $\rho = |y|$, $y = \rho y'$ вводим в рассмотрение также функцию

$$P_\alpha(x, y) = 2(\alpha+1) D^{\alpha+1} P(\rho x, y'), \ P_0(x, y) = P(\rho x, y'). \tag{7}$$

Используя свойства зональных гармоник, нетрудно установить гармоничность функции $P_\alpha(x, y')$ по обеим переменным $x, y \in B^n$. При $n = 2$ ядра $P_\alpha(x, y')$ впервые были введены для круга М. М. Джрбашяном (см. [11]).

3°. *Параметрическое представление классов* $h^p(\omega)$.

Учитывая разложение функции $u \in h(B^n)$ в виде ряда (3) и разложение ядра $P_\alpha(x, y')$, нетрудно установить следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\omega \in S$, $\alpha > \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, $1 < p < +\infty$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $u \in h^p(\omega)$;

2) u *допускает интегральное представление*

$$u(x) = \int_{B^n} (L - |y|^2)^\alpha P_\alpha(x, y') g(y) d\bar{\sigma}_n(x), \quad x \in B^n, \tag{7a}$$

где $g \in L^p(\omega, B^n)$, $d\bar{\sigma}_n(y) \overset{\text{def}}{=} |y|^{2-n} d\sigma_n(y)$, *при этом*

$$\|u\|_{h^p(\omega)} < c_p \|g\|_{L^p(\omega)}. \tag{8}$$

Интересно, что имеет место аналог этой теоремы и в случае $0 < p < 1$, а при $p = 1$ верно и другое представление. Для формулировки этого результата сначала введем обозначения.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ и

$$x_1 = r\cos\varphi_1;$$
$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1};$$
$$x_n = r\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-2};$$

$$0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2, \quad -\pi \leqslant \varphi_{n-1} < \pi$$

полярная система координат в R^n. Введем в рассмотрение следующие n-мерные диадические прямоугольные параллелепипеды:

$$\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}} = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n: \quad r = |x|; \quad 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant r < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},$$
$$\frac{\pi l_i}{2^k} \leqslant \varphi_i < \frac{\pi(l_i+1)}{2^k}; \quad \frac{\pi l_{n-1}}{2^k} \leqslant \varphi_{n-1} < \frac{\pi(l_{n-1}+1)}{2^k} \Big\}.$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-2, \quad l_i = 0, \ldots, 2^k - 1, \quad l_{n-1} = -2^k, \ldots, 2^k - 1.$$

Очевидно, что параллелепипеды $\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}}$ при различных векторах $(k, l_1, \ldots, l_{n-1})$ не пересекаются.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, $\alpha > \frac{\alpha_\omega + n}{p}$, *тогда класс* $h^p(\omega)$ *совпадает с классом функций* u, *допускающих представление*

$$u(x) = \int_{B^n} (1 - |y|^2)^\alpha P_\alpha(x, y')\, d\mu(y),$$

где μ — *произвольная борелевская мера на* B^n, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{2^k-1} \cdots \sum_{l_{n-2}=0}^{2^k-1} \sum_{l_{n-1}=-2^k}^{2^k-1} |\mu(\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}})|^p \times$$
$$\times\, \omega(|\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}}|^{1/n})\, |\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}}|^{1-p} < +\infty \tag{8a}$$

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Предложение 1. *Пусть* u *гармоничная* $\bar{B}^n$ *функция, тогда справедливо представление*

$$u(x) = \int_{B^n} (1 - |y|^2)^\alpha P_\alpha(x, y)\, u(y)\, d\bar{\sigma}_n(y) \qquad x \in B^n, \tag{9}$$

где

$$d\bar{\sigma}_n(y) = |y|^{2-n}\, d\sigma_n(y).$$

Предложение 2. *Пусть* $0<p<+\infty$, $0<\rho<1$.

$$u_\rho(x) \overset{\text{def}}{=} u(\rho x) \quad x \in B^n.$$

Тогда

$$\lim_{\rho\to 1-0} \| u_\rho - u \| h^p(\omega) = 0. \tag{10}$$

Предложение 3. *Пусть* $u \in C(B^n)$, $u(x) \geqslant 0$, *причем для любого шара*

$$K_\rho(x_0) = |x - x_0| < \rho, \quad x_0 \in B^n, \quad 0<\rho<1-|x_0|$$

имеет место оценка

$$U(x_0) \leqslant \frac{c}{\rho^n} \int\limits_{K_\rho(x_0)} u(y)\, d\sigma_n(y), \tag{11}$$

где c *положительное число, зависящее только от* n. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{2^k-1} \cdots \sum_{l_{n-2}=0}^{2^k-1} \sum_{p_{n-1}=-2^k}^{2^k-1} \Big(\max_{x\in\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}}} u(x)\Big)\, \omega\left(|\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}}|^{1/n}\right) \times$$

$$\times |\Delta_{k, l_1, \ldots, l_{n-1}}| \leqslant c_1 \int\limits_{B^n} u(x)\, d\sigma_n(x). \tag{12}$$

4°. *Представление линейных непрерывных функционалов в пространствах*

$$h^p(\omega), \quad 0<p<+\infty.$$

Здесь мы опишем $(h^p(\omega))^*$ посредством гармонических в B^n функций при всех $p \in (0, +\infty)$. С этой целью сначала введем некоторые обозначения. Пусть $\omega \in S$, $0<p<+\infty$ $-1<\alpha<+\infty$. Обозначим через ω_{α_p} функцию

$$\omega_{\alpha_p}(r) \overset{\text{def}}{=} \omega(r)\left(\frac{r^\alpha}{\omega(r)}\right)^p, \quad 0<r<1. \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть* Φ — *линейный непрерывный функционал на*

$$h^p(\omega), \quad 1<p<+\infty, \quad v(x) = \Phi(P_\alpha(x, y)),$$

где P_α — *функция, определяемая по равенству* (7), $\alpha > \alpha_\omega$.
Тогда:

1. а) *Функция* v *принадлежит классу* $h^q(\omega_{\alpha_q})$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, $\omega_{\alpha q}$ *определяется по равенству* (13);

б) *функционал* Φ *представим в виде*

$$\Phi(u) = \lim_{\rho \to 1-0} \int\limits_{S^{n-1}} u(\rho y') \cdot v(\rho y')\, d\sigma_{n-1}(y') \tag{14}$$

Здесь $d\sigma_{n-1}(y')$ — *нормированная мера Лебега на* S^{n-1}, *кроме того, справедливы оценки*

$$c_1(\alpha, p)\|v\|_{h^q(\omega_{*q})} \leqslant \|\Phi\| \leqslant c_2(\alpha, p)\|v\|_{h^q(\omega_{*q})} \tag{15}$$

при некоторых положительных постоянных $c_j(\alpha, p)$, $j = 1, 2$ *зависящих только от* α *и* p.

2) *И обратно, для любой функции* $v \in h^q(\omega_{*q})$ *формула* (14) *порождает линейный непрерывный функционал на* $h^p(\omega)$, *для которого справедливы оценки* (15).

Теперь рассмотрим случай $0 < p \leqslant 1$. Пусть как и прежде $\omega \in S$, обозначим через Λ^p_ω класс функций $v \in h(B^n)$, для которых

$$|D^{\alpha+1} v(x)| = o\left\{\frac{(\omega(1-|x|))^{1/p}}{(1-|x|)^{n+\alpha-\frac{n}{p}}}\right\}, \quad \alpha > \frac{\alpha_\omega + n}{p},$$

$$(|x| \to 1-0).$$

В Λ^p_ω вводится норма

$$\|v\|_{\Lambda^p(\omega)} = \sup_{x \in B^n}\left\{\frac{|D^{\alpha+1} v(x)|(1-|x|)^{n+\alpha-\frac{n}{p}}}{(\omega(1-|x|))^{1/p}}\right\}.$$

Относительно этой нормы Λ^p_ω превращается в банахово пространство.

Теорема 4. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, $\omega \in S$, Φ — *непрерывный линейный функционал на* $h^p(\omega)$. *Положим*

$$v(x) \overset{\text{def}}{=} \Phi(P_0(x, y)), \quad x \in B^n. \tag{16}$$

Тогда:

1. а) $v \in \Lambda^p_\omega$;

б) Φ *представляется в виде*

$$\Phi(u) = \lim_{\rho \to 1-0} \int\limits_{S^{n-1}} u(\rho y')\, v(\rho y')\, d\sigma_{n-1}(y'). \tag{17}$$

При этом существуют константы $c_1(p, \alpha)$, $c_2(p, \alpha)$ *такие, что*

$$c_1(p, \alpha)\|v\|_{\Lambda^p_\omega} \leqslant \|\Phi\| \leqslant c_2(p, \alpha)\|v\|_{\Lambda^p_\omega}. \tag{18}$$

2) *Обратно, для любой функции* $v \in \Lambda^p_\omega$, $0 < p \leqslant 1$, $\omega \in S$, *по формуле* (17) *порождается линейный непрерывный функционал на* $h^p(\omega)$, *для которого справедливы оценки* (18).

Доказательства теорем 3, 4 основаны на предложении 1, теоремах 1 и 2, на следующем вспомогательном утверждении, имеющем самостоятельный интерес.

Предложение 4. *Пусть* $\omega \in S$, $\alpha > \frac{\alpha_\omega + n}{p}$, $1 < p < +\infty$.

Тогда оператор:

$$T_\alpha(u) = \int_{B^n} u(y)\, P_\alpha(x, y')\, \omega(y)\, d\sigma_n(y) \tag{19}$$

действует из пространства L^p_ω ***в пространство*** $h^p(\omega_{\alpha p})$, ***где*** $\omega_{\alpha p}$ ***определяется по*** (13).

Институт математики
Национальной академии наук Армении
Ереванский государственный университет

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ, Մ. Ա. ՋԱՔԱՐՅԱՆ

Ներկայացման որոշ հարցեր գնդում հարմոնիկ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են R^n*-ի միավոր* B^n *գնդում հարմոնիկ ֆունկցիաների* $h^p(B^n, \omega)$, $0 < p < +\infty$, *կշռային տարածությունները՝ ω-ի վրա դրված որոշ ընդհանուր պայմանների դեպքում ստացված է այդ տարածությունների ինտեգրալ ներկայացումները և* $(h^p)^*$ *համալուծ տարածությունների լրիվ բնութագիրը հարմոնիկ ֆունկցիաների տերմիններով։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *У. Рудин*, Функциональный анализ, Мир, М., 1975. [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1 (1945). [3] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. 2 (1948). [4] *Ф. А. Шамоян*, ДАН АрмССР, т. 85, № 1 (1987). [5] *Ф. А. Шамоян*, Сибирски мат журн., т 31, № 2 (1990). [6] *A. L. Shields, D. L. Williams*, Journ. Reine and Angew. Math., v. 299/300, p. 256–279 (1978). [7] *R. R. Coifman, R. Rochberg*, Asterisque, v. 77 (1980). [8] *А. Э. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4 (1987). [9] *A. E. Djrbashian, F. A. Shamojan*, Topichs in the Theory of A^p_α spaces, Teubner Texte zur Mathematik, 1988. [10] *И. Стейн, Г. Вейс*, Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах, Мир, М., 1974. [11] *Е. Сенета*, Правильно-изменяющиеся функции, Наука, М., 1985. [12] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966.