ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К. А. Навасардян

О коэффициентах нуль-рядов и множествах единственности для двойных рядов Уолша

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. А. Талаляном 25/I 1993)

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормированная система. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ называется нуль-рядом по этой системе, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = 0$ почти всюду и $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$.

Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д. Е. Меншовым [1] в 1916 г.

В работах разных авторов (см. [2-9]) был рассмотрен вопрос о том, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты тригонометрических нуль-рядов. Наиболее значительный из этих результатов следующий (см. [2,3,7]).

Теорема А. *Пусть c_n монотонно стремится к 0 и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = +\infty$. Тогда существует ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$, который почти всюду стремится к нулю, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| > 0$ и $|a_n| \leqslant c_{|n|}$.*

Эта теорема дает положительный ответ на соответствующую проблему, поставленную П. Л. Ульяновым [10].

Подобные вопросы для систем Хаара и Уолша рассмотрены в работах [11-13]. Ф. Г. Арутюнян [13] отмечает, что аналогичный результат можно получить для системы Уолша.

В связи с вышеуказанными результатами Г. Г. Геворкян [14], для системы Уолша доказал следующую теорему.

Теорема В. *Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 = +\infty$. Тагда существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 0$, такое, что:*

1) *существует ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(t)$ *с коэффициентами* $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$, *который всюду вне* E *сходится к нулю и* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$;

2) *если* $b_n = o(\varepsilon_n)$ *и ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(t)$ *всюду вне* E, *за исключением некоторого счетного множества, сходится к нулю, то* $b_n = 0$ *для всех* n.

В настоящей работе рассматривается тот же вопрос для двойных рядов Уолша. Доказана следующая

Теорема. *Пусть двойная последовательность* $\{\varepsilon_{mn}\}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $\varepsilon_{mn+1} \leqslant \varepsilon_{mn}$, $\varepsilon_{m+1n} \leqslant \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty$ и $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$. *Тогда существует множество* $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$, $\mu E = 0$, *такое, что:*

1) *существует ряд* $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$, *такой, что частичные суммы*

$$S_{pq}(x, y) = \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\substack{2^q-1 \\ 2^p-1}} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

всюду вне E *сходятся к нулю, а коэффициенты ряда удовлетворяют следующим условиям:* $|a_{mn}| \leqslant \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| > 0$;

2) *если* $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$ *и существуют последовательности натуральных чисел* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{h_l\}_{l=1}^{\infty}$, *стремящиеся к бесконечности, такие, что суммы*

$$\sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\substack{2^{h_l}-1 \\ 2^{g_k}-1}} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

всюду вне E, *быть может за исключением некоторого счетного множества отрезков, параллельных координатным осям, сходятся к нулю, то для всех* m *и* n $b_{mn} = 0$.

Под сходимостью мы подразумеваем сходимость по прямоугольникам, т. е. скажем, что $a_{mn} \to A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $M = M(\varepsilon)$ такое, что если $m > M$, $n > M$, то $|a_{mn} - A| < \varepsilon$.

При доказательстве теоремы мы пользуемся леммой 1, доказанной Г. Г. Геворкяном [14].

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$ и $\beta \leqslant \alpha \leqslant 2\beta$. Тогда для любого отрезка $\left[\frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma}\right]$, где $\sigma = 2\beta - \alpha$, $x = 0, 1, \ldots, 2^\sigma - 1$, и любого $n > \alpha$ существует полином*

$$\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|a_n^{(m)}| \leqslant 2^{-\beta}$, $\quad m = 1, 2, \ldots, 2^n$;

2) $\sum_{m=1}^{2^n} |a_n^{(m)}| = 2^{\sigma-\beta}$;

3) $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t) = 0$, $\quad$ *когда* $t \,\overline{\in}\, \left[\frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma}\right]$;

4) $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t) = 1$, $\quad$ *когда* $t \in E_1 \subset \left[\frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma}\right]$,
$\mu E_1 = 2^{-\sigma-1}$;

5) $\sum_{m=1}^{2^n} a_n^{(m)} W_n^{(m)}(t) = -1$, $\quad$ *когда* $t \in E_2 \subset \left[\frac{x}{2^\sigma}; \frac{x+1}{2^\sigma}\right]$,
$\mu E_2 = 2^{-\sigma-1}$,

причем множества E_1 и E_2 являются объединением интервалов типа Хаара $\left(\frac{x_i}{2^{\sigma+1}}; \frac{x_i+1}{2^{\sigma+1}}\right)$ $i \in \mathrm{N}$.

В заключение выражаю благодарность Г. Г. Геворкяну за внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный университет

Կ. Ա. ՆԱՎԱՍԱՐԴՅԱՆ

Կրկնակի Ուոլշի շարքերի միակության բազմությունների և զրո-շարքերի գործակիցների վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ. Դիցուք $\{\varepsilon_{mn}\}$ կրկնակի հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին. $\varepsilon_{m+1\,n} \leqslant \varepsilon_{mn}$, $\varepsilon_{m\,n+1} \leqslant \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{m0}^2 < +\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{0n}^2 < +\infty$, և $\sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn}^2 = +\infty$: Գոյություն ունի $E \subset [0; 1] \times [0; 1]$ բազմություն, $\mu E = 0$, այնպիսին, որ

1. Գոյություն ունի $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$ շարք, որի

$$S_{pq}(x, y) = \sum_{\substack{m=0\\ n=0}}^{\substack{2^p-1\\ 2^q-1}} a_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

մասնակի գումարները E-ից դուրս զուգամիտում են զրոյի, և շարքի գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմաններին. $|a_{mn}| \leqslant \varepsilon_{mn}$, $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| > 0$:

2. Եթե $b_{mn} = o(\varepsilon_{mn})$ և գոյություն ունեն բնական թվերի $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ և $\{h_l\}_{l=0}^{\infty}$ անվերջի ձգտող ենթահաջորդականությունները, այնպես, որ

$$\sum_{\substack{m=0\\ n=0}}^{\substack{2^{g_k}-1\\ 2^{h_l}-1}} b_{mn} W_m(x) W_n(y)$$

գումարները E-ից դուրս ամենուրեք, բացի գուցե կոորդինատական առանցքներին զուգահեռ հաշվելի բազմությամբ, գծերից զուգամիտում են զրոյի, ապա բոլոր m-երի և n-երի համար $b_{mn} = 0$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] D. E. Menchoff, C. R. Acad. Sci. Paris, v. 163, p. 433—435 (1916). [2] Ф. Г. Арутюнян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 19 (1984), с. 448—266. [3] Ф. Г. Арутюнян, Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами. Докт. дис., Тбилиси, 1986. [4] О. С. Ивашев-Мусатов, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 20, с. 179—196 (1956). [5] О. С. Ивашев-Мусатов, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 21, с. 559—578, (1957). [6] J. E. Littlewood, Quart. J. Math., Oxford, Ser. 6, p. 219—226 (1935). [7] Н. Б. Погосян, Anal. Math., v. 11, p. 139—177 (1985). [8] R. Salem, J. Math. Phys., v. 21, p. 69—82 (1942). [9] A. C. Schaeffer, Amer. J. Math., v. 61, p. 934—941 (1939). [10] П. Л. Ульянов, Успехи мат. наук, т. 19, с. 3—69, (1964). [11] В. А. Скворцов, Мат. заметки, т. 19, с. 179—186 (1976). [12] В. А. Скворцов, Мат. заметки, т. 21, с. 335—340 (1977). [13] В. А. Скворцов, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 41, с. 703—716 (1977). [14] G. G. Gevorkian, Anal. Math., v. 14, p. 219—251 (1988).