ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 512.57

В. Г. Мелконян

Квазитождества и условные сверхтождества дистрибутивных решеток

(Представлено академиком НАН Армении Р. Р. Варшамовым 16/X 1992)

Формально условным сверхтождеством (квазисверхтождеством) называется формула 2-й ступени вида

$$\forall F_1, \dots, F_m \forall x_1, \dots, x_n (\pi_1 = \sigma_1 \& \pi_2 = \sigma_2 \& \dots \& \pi_s = \sigma_s \rightarrow \pi_{s+1} = \sigma_{s+1}),$$

где $\pi_1, \sigma_1, \dots, \pi_{s+1}, \sigma_{s+1}$ — некоторые термы от предметных переменных $x_1, \dots, x_n$ и от функциональных переменных $F_1, \dots, F_m$ (1).

Упомянутая формула* называется условным T-сверхтождеством, если $\{|F_1|, \dots, |F_m|\} \subseteq T$.

Рангом условного сверхтождества назовем мощность множества $\{F_1, \dots, F_m\}$. В условном сверхтождестве (тождестве) равенства, до знака импликации, назовем посылками, а равенство после знака импликации — заключением.

Пусть $U = \langle B; \Sigma \rangle$ — некоторая T-алгебра в смысле (1). Будем говорить, что в U выполняется условное T-сверхтождество

$$\forall F_1, \dots, F_m \forall x_1, \dots, x_n (\pi_1 = \sigma_1 \& \dots \& \pi_s = \sigma_s \rightarrow \pi_{s+1} = \sigma_{s+1}),$$

если всякий раз, когда каждая функциональная переменная из $F_1, \dots, F_m$ заменяется любой операцией соответствующей арности из Σ, получаем квазитождество, истинное в U.

Мы будем рассматривать условные сверхтождества, имеющие место в многообразии D дистрибутивных решеток.

Через hqi обозначим множество тех условных сверхтождеств, истинных в D, ранг которых < 2. Цель настоящей работы—найти базис для hqi.

1. *Связь между условными сверхтождествами и квазитождествами.* 1.1. Квазитождество называется тривиальным, если в его посылках и заключении имеется лишь один символ операции.

---

* Для краткости условные сверхтождества иногда записываются без кванторной приставки.

Любое тривиальное квазитождество, имеющее место в классе D дистрибутивных решеток, выполняется и в классе SL всех полурешеток.

Доказательство вытекает из того факта, что любая полурешетка вкладывается в некоторую дистрибутивную решетку ((3), с. 148).

1.2. Если α является квазитождеством (термом), то назовем ретрактом α и обозначим через ret (α) тривиальное квазитождество (терм), которое получается от α, заменой знака $\cdot$ знаком $+$.

Квазитождество α, имеющее место в D, назовем D-регулярным, если в D имеет место также и ret (α).

Через rql обозначим множество всех D-регулярных квазитождеств.

1.3. Если α квазитождество, то трансформацией α называется условное сверхтождество $H(\alpha)$, которое получается от α, заменой $(+)\to F_1$ и $(\cdot)\to F_2$, где F_1, F_2 — бинарные функциональные переменные. Если $\varkappa = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ — некоторое семейство квазитождеств, то обозначим $H(\varkappa) = \{H(\alpha_k) \mid k \in K\}$.

Легко заметить, что $H(rqi) = hqi$.

1.4. Утверждение. Если семейство квазитождеств $\varkappa = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ является базисом для rqi, то $H(\varkappa)$ будет базисом для hqi.

2. *Квазимногообразие PDQ дистрибутивных квазирешеток.* 2.1. Пусть $A(+)$ некоторая полурешетка. Будем говорить, что в $A(+)$ элементы $a, b \in A$ находятся в отношении $a - \langle + \rangle - b$, если либо $a \overset{\pm}{-\!\!<} b$, либо $b \overset{\pm}{-\!\!<} a$.

Допустим, что $U(+, \cdot)$ некоторая биполурешетка. Скажем, что в $U(+, \cdot)$ выполняется условие конечного кручения, если для любых $a, b \in U$ имеет место $a - \langle + \rangle - b \Leftrightarrow a - \langle \cdot \rangle - b$.

Будем говорить, что в биполурешетке $U(+, \cdot)$ выполняется условие кручения, если в любой подалгебре $U(+, \cdot)$ выполняется условие конечного кручения.

2.2. Алгебра $U(+, \cdot)$ называется дистрибутивной квазирешеткой ([5]), если она удовлетворяет следующим тождествам:

$$x \cdot x = x, \qquad x + x = x \qquad \text{(id)}$$

$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad x + y = y + x \qquad \text{(com)}$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \qquad (x + y) + z = x + (y + z) \qquad \text{(ass)}$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z) \qquad \text{(dis)}$$

Через L_7^- обозначим следующую 3-элементную алгебру:

$+$	a	b	∞
a	a	b	∞
b	b	b	∞
∞	∞	∞	∞

$\cdot$	a	b	∞
a	a	a	∞
b	a	b	∞
∞	∞	∞	∞

Нетрудно проверить, что L_2^- является дистрибутивной квазирешеткой, в которой не выполняется условие конечного кручения.

2.3. Напомним определение суммы Плонки ([6]).

Пусть $(U_i \mid i \in I)$ является семейством алгебр типа τ, индексированных по элементам верхней полурешетки I. Пусть для каждой пары $i, j \in I$, где $i \leqslant j$ в I, дан гомоморфизм $h_{ij}: U_i \to U_j$, так что h_{ii} — это идентичное отображение U_i в себя, а

$$i \leqslant j \leqslant k \Rightarrow h_{ik} = h_{jk} h_{ij}. \tag{2.3.1}$$

Тогда совокупность $\langle I, (U_i \mid i \in I), (h_{ij} \mid i, j \in I;\ i \leqslant j) \rangle$ называется направленной системой алгебр. Суммой Плонки этой системы называется алгебра U типа τ, носителем которой является $\bigcup_{i \in I} U_i$, а ее операции определяются следующим образом:

$$f_t^u(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = f_t^k(h_{i_1 k}(a_{i_1}), \ldots, h_{i_n k}(a_{i_n})), \tag{2.3.2}$$

где $a_{ij} \in u_{ij}$ для любого $j \in \overline{1, n}$, $k = \sup(i_1, \ldots, i_n)$, f_t есть n-местный символ операции из τ, f_t^u — реализация f_t на U, а f_t^k — реализация f_t на U_k.

В ([6]) показано, что любая дистрибутивная квазирешетка является суммой Плонки направленной системы дистрибутивных решеток.

2.4. Теорема. *Пусть U — некоторая дистрибутивная квазирешетка, которая является суммой Плонки направленной системы дистрибутивных решеток $\langle I, (U_i \mid i \in I), (h_{ij} \mid i, j \in I;\ i \leqslant j) \rangle$. Тогда для U следующие четыре условия эквивалентны:*

(1) в U выполнено условие кручения;

(2) U не имеет подалгебру, изоморфную L_2^-;

(3) все h_{ij} $(i, j \in I,\ i \leqslant j)$ инъективны;

(4) в U имеет место следующее квазитождество:

$$\forall x, y, z\,(y \cdot x = x \;\&\; x \cdot z = z \;\&\; x + y = y \;\&\; y + z = z \to x = y). \tag{pl}$$

Класс дистрибутивных квазирешеток, удовлетворяющих условиям теоремы, является квазимногообразием, определяемым квазитождествами (Id), (com), (ass), (dis), (pl). Это квазимногообразие обозначим через PDQ. Очевидно, что $D \subset PDQ \subset DQ$.

3. *Базис для hqi*. 3.1. Лемма. *Пусть имеем следующее квазитождество из rqI:*

$$\forall x_1, \ldots, x_n(\pi = \sigma \;\&\; \ldots \;\&\; \beta = \gamma \to \delta = \varepsilon).$$

Допустим, что дистрибутивная квазирешетка U является суммой Плонки направленной системы $(U_i \mid i \in I)$ дистрибутивных решеток. Тогда, если для каких-то элементов $a_1, \ldots, a_n \in U$ имеем

$$\pi(a_1, \ldots, a_n) = \sigma(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \beta(a_1, \ldots, a_n) = \gamma(a_1, \ldots, a_n),$$

то $\delta(a_1, \ldots, a_n)$ и $\varepsilon(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежат одной и той же решетке U_k $(k \in I)$.

3.2. Теорема. *Множество квазитождеств* (id), (com), (ass), (dis), (pl) ***является базисом для*** *rqi* ***или*** *PDQ* ***является множеством всех моделей*** *rqi.*

Доказательство основывается на результатах теоремы 2.4 и леммы 3.1.

Исходя из утверждения 1.4 и теоремы 3.2 заключаем, что следующее множество условных сверхтождеств (квазисверхтождеств) является базисом для *hqi*:

$$F(x, x) = x$$

$$F(x, y) = F(y, x)$$

$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$$

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z))$$

$$F(y, x) = x \,\&\, F(x, z) = z \,\&\, G(x, y) = y \,\&\, G(y, z) = z \rightarrow x = y.$$

Ереванский государственный университет

Վ. Գ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

Բաշխական կավարների քվազինույնություններ և պայմանական գերնույնություններ

Աշխատանքը նվիրված է բաշխական կավարների բազմաձևությունում տեղի ունեցող պայմանական գերնույնությունների նկարագրությանը՝ քվազինույնությունների օգնությամբ։

Պայմանական գերնույնություն (քվազիգերնույնություն) է կոչվում հետևյալ տեսքի 2-րդ աստիճանի բանաձևը.

$$\forall F_1, \ldots, F_m \forall x_1, \ldots, x_n (\pi_1 = \sigma_1 \,\&\, \pi_2 = \sigma_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \pi_s = \sigma_s \rightarrow \pi_{s+1} = \sigma_{s+1}),$$

որտեղ $\pi_1, \sigma_1, \ldots, \pi_{s+1}, \sigma_{s+1}$ *բազմանդամներ են՝ կախված են* $x_1, \ldots, x_n$ *առարկայական փոփոխականներից և* $F_1, \ldots, F_m$ *ֆունկցիոնալ փոփոխականներից։*

Աշխատանքում նախ դիտարկվում է D-ռեգուլյար անվանվող քվազինույնությունների rqi բազմությունը։ Մի կողմից ցույց է տրվում նրանց կապը պայմանական գերնույնությունների հետ, մյուս կողմից Պլոնկայի գումարի օգնությամբ գտնվում է վերջավոր բազիս rqi-ի համար։ Արդյունքում բաշխական կավարների բազմաձևության 2-ռանգանի պայմանական գերնույնությունների համար ստացվում է հետևյալ վերջավոր բազիսը՝

$$F(x, x) = x,$$

$$F(x, y) = F(y, x),$$

$$F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z),$$

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)),$$

$$F(y, x) = x \,\&\, F(x, z) = z \,\&\, G(x, y) = y \,\&\, G(y, z) = z \rightarrow x = y\text{։}$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, «Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах» 1990. [2] *Ю. М. Мовсисян*, «Введение в теорию алгебр со сверхтождествами», 1986. [3] *Г. Гретцер*, «Общая теория решеток», 1982, стр. 148. [4] *А. И. Мальцев*, «Алгебраические системы», 1970, с. 143. [5] *J. Plonka*, Fund. Math., v. 62, p. 293—300 (1968). [6] *J. Plonka* Fund. Math., v. 61, p. 183—189 (1967).