ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 529.3.01

М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян

Решение задачи о напряженном состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге методом ортогональных многочленов

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Б. Л. Абрамяном 9/X 1991)

В статье [1] решение задачи о напряженном состоянии упругого бесконечного пространства с периодической системой коллинеарных трещин, расположенных в одной плоскости, при продольном сдвиге построено в квадратурах.

В настоящей статье это решение строится развитым в [2, 3], а также в [4] методом ортогональных многочленов Чебышева, который в ряде случаев в смысле вычисления несингулярных интегралов оказывается более эффективным.

1. Как показано в [1], определяющими уравнениями упомянутой задачи будет сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\,\tilde{\varphi}'(\eta)\,d\eta=-\tilde{\tau}_{+}(\xi)-\tilde{\tau}_{-}(\xi)\qquad(|\xi|<a)\tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\tilde{\varphi}(a)=0,\qquad\tilde{\varphi}(-a)=0,\tag{1.2}$$

откуда определяется плотность дислокаций, точнее, производная приведенных раскрытий трещин при заданных на их берегах нагрузках $\tilde{\tau}_{\pm}(\xi)$ и уравнение

$$\tilde{\tau}(\xi)=-\frac{G}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\,\tilde{\varphi}'(\eta)\,d\eta\qquad(a<|\xi|<\pi),\tag{1.3}$$

откуда определяются разрушающие напряжения $\tilde{\tau}(\xi)$ вне трещин на их линии продолжения, где $G=G_{+}G_{-}/(G_{+}+G_{-})$ — приведенный модуль сдвига составного упругого пространства [1].

Решения уравнений (1.1)—(1.3) здесь построим методом ортогональных многочленов Чебышева. С этой целью решение уравнения (1.1) представим в виде бесконечного ряда

$$\tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{\cos(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(\operatorname{tg}(\xi/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)), \qquad (|\xi| < \alpha) \qquad (1.4)$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода, а коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ неизвестны и подлежат определению. Далее выражение $\tilde{\varphi}'(\xi)$ из (1.4) подставляем в уравнение (1.1), меняем порядок интегрирования и суммирования, а затем воспользуемся интегральными соотношениями [4, 5]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2} \cdot \frac{T_n(\operatorname{tg}(\eta/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2))\,d\eta}{\sec\frac{\eta}{2}\sqrt{2(\cos\eta - \cos\alpha)}} =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad (n = 0); \\ \csc\frac{\alpha}{2} U_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad (n = 2m, \quad m = 1, 2, \ldots); \\ \csc\frac{\alpha}{2} U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \\ \quad + (-1)^m \frac{\sin(\alpha/2)}{1+\cos(\alpha/2)}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)^{2m-2} \\ \quad (|\xi| < \alpha); \quad (n = 2m-1, \quad m = 1, 2, \ldots) \end{cases} \qquad (1.5)$$

где $U_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода.

В результате после простых преобразований будем иметь

$$\csc\frac{\alpha}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} U_{2n-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2n-1} x_{2n-1} = -\tilde{\tau}_+(\xi) - \tilde{\tau}_-(\xi) \qquad (|\xi| < \alpha). \qquad (1.6)$$

Теперь при помощи условия ортогональности многочленов Чебышева второго рода

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} U_{m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) U_{n-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\sec^2(\xi/2) \times$$

$$\times \sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}\,d\xi = \begin{cases} 0 \quad (m \neq n) \\ 2\pi\cos(\alpha/2)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \qquad (m = n); \end{cases}$$

из (1.6) сразу находим

$$x_n = -a_n \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} U_{n-1}\left(\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \sec^3 \frac{\xi}{2} \times$$

$$\times \sqrt{2(\cos\xi - \cos\alpha)}\, [\tilde{\tau}_+(\xi) + \tilde{\tau}_-(\xi)]\, d\xi; \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (1.7)$$

$$x_1 = -a_1 \sec \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_{2n-1} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}\right)^{2n-1}.$$

Остается определить коэффициент x_0. Для его определения обе части (1.4) проинтегрируем от $-\alpha$ до ξ. Будем иметь

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n A_n(\xi);$$

$$A_n(\xi) = \int_{-\alpha}^{\xi} \frac{\cos(\eta/2)}{\sqrt{2(\cos\eta - \cos\alpha)}} T_n\left(\operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) d\eta \qquad (1.8)$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots),$$

причем

$$A_n(\alpha) = \begin{cases} 0 & (n = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots); \\ \pi(-1)^k \left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}\right)^{2k} & (n = 2k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases} \qquad (1.9)$$

Приняв во внимание граничные условия (1.2), из (1.8) и (1.9) получим

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2n}. \qquad (1.10)$$

Обращаясь далее к вопросу определения напряжений вне трещин по формуле (1.3), легко заметить, что при этом возникает необходимость вычисления интеграла в (1.5) при $\alpha < |\xi| < \pi$. Для вычисления этого интеграла воспользуемся интегральными соотношениями ($H(x)$—функция Хевисайда)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{T_n(t/a)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} =$$

$$= \begin{cases} \ln \dfrac{2(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})}{a^2} & (n = 0); \\ \dfrac{1}{n} [H(x) + (-1)^n H(-x)] \left(\dfrac{|x| - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)^n, \\ \qquad (n = 1, 2, \ldots; \ |x| > a) \end{cases}$$

которые можно получить, в частности, из результатов работы ([4]). Положив $x = \mathrm{tg}(\xi/2)$, $t = \mathrm{tg}(\eta/2)$, $a = \mathrm{tg}(\alpha/2)$, после несложных преобразований придем к следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{ctg}\,\frac{\eta-\xi}{2}\,\frac{\cos(\eta/2)}{\sqrt{2(\cos\eta-\cos\alpha)}}\,T_n(\mathrm{tg}(\eta/2)\cdot\mathrm{ctg}(\alpha/2))\,d\eta =$$

$$=\begin{cases} -2\,\mathrm{sgn}\,\xi\cos(\xi/2)\,[2(\cos\alpha-\cos\xi)]^{-\frac{1}{2}} \qquad (n=0); \\ -\sec\dfrac{\alpha}{2}\,[H(\xi)+(-1)^n H(-\xi)]\,\mathrm{sgn}\,\xi\left(\mathrm{tg}^2\dfrac{\xi}{2}-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times \\ \times\left[\left(\left|\mathrm{tg}\dfrac{\xi}{2}\right|-\sqrt{\mathrm{tg}^2\dfrac{\xi}{2}-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right]^n+ \\ +\begin{cases} 0 \quad (n=2m); \\ (-1)^m\left(\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{4}\right)^{2m-1} \qquad (n=2m-1). \end{cases} \\ \qquad (m=1,\,2,\,\ldots;\quad \alpha<|\xi|<\pi) \end{cases} \tag{1.11}$$

Теперь выражение $\bar{\varphi}'(\xi)$ из (1.4) подставляем в формулу (1.3), а затем меняем порядок интегрирования и суммирования. Тогда с учетом (1.11) будем иметь

$$\bar{\tau}(\xi) = G\left\{x_0\,\mathrm{sgn}\,\xi\cos(\xi/2)\,[2(\cos\alpha-\cos\xi)]^{-\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}x_1\left|\sec\frac{\alpha}{2}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\xi}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\left|\mathrm{tg}\frac{\xi}{2}\right|-\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\xi}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\right|-\frac{1}{2}\sec\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sgn}\,\xi\left(\mathrm{tg}^2\frac{\xi}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\sum_{n=2}^{\infty}a_n[H(\xi)+(-1)^n H(-\xi)]\left[\left(\left|\mathrm{tg}\frac{\xi}{2}\right|-\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\xi}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right]^n+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_{2n-1}\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\right)^{2n-1}\right\}. \tag{1.12}$$

$$(\alpha<|\xi|<\pi)$$

где коэффициенты x_0 и x_1 даются формулами (1.7) и (1.10), а коэффициенты a_n—формулой (1.7).

Таким образом, приведенные раскрытия трещин периодической системы выражаются формулой (1.8), а разрушающие напряжения вне трещин—формулой (1.12). При этом выражение функции $A_n(\xi)$ приведено в ([4]) (с. 146).

2. Перейдем к определению коэффициентов интенсивности напряжений $K_{III}^{\pm}$ соответственно концевым точкам трещин $x=\pm a$. Имеем, по определению,

$$K_{III}^{+} = \sqrt{2\pi} \lim_{x\to a+0} \sqrt{x-a}\,\tau_{yz} = -\sqrt{2l} \lim_{\xi\to 1+0} \sqrt{\xi - 1}\,\tilde{\varphi}(\xi)$$

Приняв во внимание (1.12), находим

$$K_{III}^{+} = -\frac{G\sqrt{l}\cos(\alpha/2)}{\sqrt{\sin\alpha}}\left(x_0 + x_1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n\right). \qquad (2.1)$$

Аналогичным образом

$$K_{III}^{-} = \sqrt{2\pi} \lim_{x\to -a-0} \sqrt{|a+x|}\,\tau_{yz} = -\sqrt{2l} \lim_{\xi\to -1-0} \sqrt{|\xi+1|}\,\tilde{\varphi}(\xi) =$$

$$= \frac{G\sqrt{l}\cos(\alpha/2)}{\sqrt{\sin\alpha}}\left[x_0 - x_1 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n\right]. \qquad (2.2)$$

Отметим, что по аналогии с известным результатом [7] коэффициенты интенсивности напряжений можно определить также при помощи выражения плотности дислокаций $\tilde{\varphi}'(\xi)$ из (1.4). Действительно, хорошо известно [8], что смещения в окрестности концевой точки трещины при антиплоской деформации даются асимптотической формулой

$$u_z = \frac{K_{III}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (r\to 0),$$

где G—модуль сдвига материала тела, а u_z—смещения вдоль оси Oz, в направлении которой осуществляется продольный сдвиг. Положив $\nu=\pm\pi$ применительно к окрестности точки $x=a$, будем иметь

$$u_z^{\pm}(x, 0) = \pm\frac{K_{III}^{+}}{G}\sqrt{\frac{2(a-x)}{\pi}} \qquad (x\to a-0).$$

Отсюда

$$\varphi(x) = u_z^{+}(x, 0) - u_z^{-}(x, 0) = \frac{2K_{III}^{+}}{G}\sqrt{\frac{2(a-x)}{\pi}}$$

и, следовательно,

$$K_{III}^{+} = -G\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{x\to a-0}\sqrt{a-x}\,\varphi'(x). \qquad (2.3)$$

Вполне аналогичным образом

$$K_{III}^{-} = G\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{x\to -a+0}\sqrt{a+x}\,\varphi'(x). \qquad (2.4)$$

Формулы (2.3)—(2.4) имеют место только для однородного тела с трещиной, подверженного антиплоской деформации. Однако легко заметить, что эти формулы справедливы также в случае составного тела, если в них заменить G на $\tilde{G}=2G$, где G—приведенный модуль сдвига составного тела.

На основании сказанного

$$K^{+}_{III} = \mp G\sqrt{2l}\lim_{\xi \to \mp 0}\sqrt{x \mp \xi}\,\tilde{\varphi}'(\xi), \tag{2.5}$$

так как $\varphi'(x) = \tilde{\varphi}'(\xi)$. При этом $\tilde{\varphi}'(\xi)$ дается формулой (1.4), а коэффициенты x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — формулой (1.7). Легко проверить, что полученные по формуле (2.5) выражения K^{+}_{III} совпадают с (2.1) и (2.2) соответственно.

Отметим, что входящий в (1.7) интеграл после замены переменной $\cos\theta = \mathrm{tg}(\xi/2)\cdot \mathrm{cth}(a/2)$ преобрзуется в формулу для синус-коэффициентов Фурье некоторой функции, вычисления которых можно осуществить эффективными алгоритмами. Отметим еще, что развитые здесь и в ([1]) методики могут быть использованы для исследования соответствующих плоских задач.

Институт механики
Национальной академии наук Армении

Մ. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Երկայնական սահքի ժամանակ համօտղված ճաքերի պարբերական համակարգով բաղադրյալ առաձգական պնվերջ մարմնի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի լուծումը օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով

Աշխատանքում Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ կառուցված է երկայնական սահքի ժամանակ համուղղված ճաքերի պարբերական համակարգով թուլացված բաղադրյալ առաձգական անվերջ տարածության լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի լուծումը, որը ներկայացված է Չեբիշևի առաջին սեռի բազմանդամներ պարունակող անվերջ շարքի տեսքով։ Այդ շարքի գործակիցների համար ստացված է բավականին պարզ կառուցվածքի բացահայտ բանաձև, որը փոփոխականի փոխարինման միջոցով բերվում է ինչ-որ ֆունկցիայի սինուս-գործակիցների համար բանաձևի։ Հաշվված են քայքայող լարումների ուժգնության գործակիցը։ Վերջիններիս հաշվման համար առաջարկված է նաև մեկ ուրիշ բանաձև՝ հիմնըված ճաքի բացվածքի ածանցյալի մեծությունը օգտագործելու վրա։ Նըշված է, որ հաշվման երկու եղանակներն էլ բերում են միևնույն արդյունքին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. С. Мкртчян, С. М. Мхитарян*, ДАН Армении, т. 94, № 2, с. 104—109 (1993). [2] *Г. Я. Попов*, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев—Одесса, 1982. [3] *Г. Я. Попов*, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. [4] *В. М.*

Александров, С. М. Мхитарян, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983. [5] *Г. А. Морарь, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 35, вып. 1, с. 172—178 (1971). [6] *С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 219—227 (1983). [7] *B. A. Bilby, J. D. Eshelby*, Fracture (edited by H. Liebowitz), v. 1, Chap. 2, Academic Press, New York, 1968. [8] *М. А. Саврук*, Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами, механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие. Т. 2, Наукова думка, Киев, 1988.