ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 94 1993 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

К. В. Шахбазян, С. А. Мовсисян

Решение задачи стабилизации конвейера, основанное на декомпозиции процессов

(Представлено чл.-корр. НАН Армении Ю. Г. Шукуряном 3/IX 1992)

Рассмотрим произвольный ориентированный граф $G=(V_G, U_G)$. Свяжем с графом G конечный автомат $K(G)$, который будем называть *конвейером*. Каждой вершине $v \in V_G$ с $m_v \neq 0$ заходящими дугами сопоставим функцию $f_v: A^{m_v} \to A$, где A — конечный алфавит. Предполагаем, что m_v дуг, заходящих в вершину v, перенумерованы и i-ой дуге соответствует i-ый аргумент функции f_v. Рассмотрим векторы: $V_{\text{входн}}=(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор входных вершин графа G, для которых $m_{x_i} \neq 0$, $V_{\text{внутр}}=(v_1, \ldots, v_r)$ — вектор внутренних вершин графа G, для которых $m_{v_i}>0$. Пусть A — алфавит состояний вершин G, и состояние вершины v в момент t обозначим $a(v, t)$.

Состоянием конвейера $K(G)$ в момент t будем называть вектор $(a(v_1, t), \ldots, a(v_r, t))$.

Входной символ конвейера $K(G)$ — произвольный вектор $\sigma \in A^n$. Поступление символа $\sigma=(b_1, \ldots, b_n)$ на вход конвейера в момент t заключается в том, что каждое $x_i \in V_{\text{входн}}$ приобретает в момент t состояние $a(x_i, t)=b_i$.

Функция перехода: если задано состояние $S=(a_1, \ldots, a_r)$ и входной символ $\sigma=(b_1, \ldots, b_n)$, то следующее состояние $S'=(a'_1, \ldots, a'_r)$ вычисляется по формуле $a'_i=f_{v_i}(c_1, \ldots, c_{m_{v_i}})$ $(i=1, \ldots, r)$, где

$$C_l=\begin{cases} a_j, & \text{если } l\text{-ая дуга, заходящая в } v_i, \text{ есть } (v_j, v_i) \\ b_j, & \text{если } l\text{-ая дуга, заходящая в } v_i, \text{ есть } (x_j, v_i) \end{cases}$$

Конвейер $K(G)$ определен. Сформулируем задачу стабилизации.

Бесконечную последовательность слов в алфавите A назовем стабилизирующейся, если, начиная с некоторого места, все ее элементы совпадают. Если последовательность представляет собой повторение одного и того же слова, будем называть ее *стабильной*.

Задача стабилизации. Задан конвейер $K(G)$, его начальное состояние S_0 и стабильная входная последовательность $\Sigma=\sigma, \sigma, \ldots$. Стабилизируется ли соответствующая последовательность состояний $K(G)$?

Данная работа содержит алгоритм решения задачи стабилизации, использующий декомпозиции процессов ([1]) и снижающий показатель степени в оценке сложности тривиального алгоритма $O(|A|^{|V_{\text{внутр}}|})$.

Введем понятие процесса в конвейере $K(G)$. Рассмотрим произвольный процесс P в графе G (см. ([1])). По определению P есть множество пар (v, t), обладающее определенными свойствами замкнутости. Процессом P конвейера $K(G)$, соответствующим процессу P в графе G, будем называть множество троек $\overline{P}=\{v, t, a(v, t)\}$, где $a(v, t)\in A$ такое, что $\{v, t/v, t, a\in\overline{P}\}=P$, $a(v, t)=f_v(a(v_1, t-1),\ldots$ $\ldots, a(v_{m_v}, t-1))$, где $v_1, \ldots, v_{m_v}$ — начало дуг, заходящих в вершину в порядке их нумерации. Иначе говоря, в конвейерном процессе к паре v, t присоединяется третья компонента — состояние v в момент t. Очевидно, что каждому процессу P в графе соответствует некоторое множество процессов в конвейере $K(G)$, которое будем обозначать P^*.

Это определение дает возможность интерпретировать процесс вычислений в $K(G)$, т. е. последовательность состояний $S_0, S_1, S_2, \ldots$, при входной последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ как полный процесс в конвейере $K(G)$, усеченный во времени, т. е. рассматриваемый лишь для $t\geqslant 0$. Будем обозначать результат такого усечения процесса $\overline{P}\in P^*$ через $\overline{\overline{P}}$. Очевидно, что к усеченному полному процессу в конвейере приложимы все теоремы о декомпозиции, полученные в ([1]).

Перечислим несколько утверждений, легко вытекающих из ([1]).

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть полный процесс в конвейере $K(G)$ есть $\overline{\overline{R}}=\overline{\overline{P}}_1\cup\overline{\overline{P}}_2$. Процесс $\overline{\overline{R}}$ стабилизируется при данных S_0 и Σ тогда и только тогда, когда стабилизируются $\overline{\overline{P}}_1$ и $\overline{\overline{P}}_2$ и для всех $v\in V_{\text{внутр}}$ и достаточно больших t, t' из $v, t, a\in\overline{\overline{P}}_1$, $v, t', a'\in\overline{\overline{P}}_2$ следует $a=a'$.

У т в е р ж д е н и е 2. Полный процесс R в конвейере $K(B)$ с сильно связным графом B является объединением $k(B)$ подобных простых непересекающихся периодических процессов, соответствующих стволам графа B

$$\overline{\overline{R}}=\overline{\overline{W}}_0(B)\cup\overline{\overline{W}}_1(B)\cup\cdots\cup\overline{\overline{W}}_{k(B)-1}(B),$$

где

$$\overline{\overline{W}}_j(B)=\{v, t, a(v, t)/v\in V_i(B),\ 0\leqslant i\leqslant k(B)-1,$$
$$t\equiv i+j\,(\mathrm{mod}\,k(B)),\quad j=0,\ldots,k(B)-1\}$$

$k(B)$ — индекс расщепление графа B, $V_0(B), \ldots, V_{k(B)-1}(B)$ — разбиение V_B, определенное в ([1]).

Пусть P — периодический процесс с периодом π, N — автомат с внутренними состоянием из A^s и входными сигналами из A^l.

Определение. Автомат N *моделирует* семейство процессов P^* в конвейере $K(G)$, если в G существуют вершины $v_1, \ldots, v_s \in V_{\text{внутр}}$, $x_1, \ldots, x_l \in V_{\text{входн}}$ и целые числа $t_1^0, \ldots, t_s^0$, $t_1^{00}, \ldots, t_l^{00}$ такие, что для каждого процесса $\overline{P} \in P^*$ выполняется следующее: при начальном состоянии $(a_1^0, \ldots, a_s^0)$, где $(v_i, t_i^0, a_i^0) \in \overline{P}$ и при входной последовательности $z = (z_1^0, \ldots, z_l^0), \ldots, (z_1^n, \ldots, z_l^n), \ldots$ где $(x_i, t_i^{00} + n\pi, z_i^n) \in \overline{P}$, автомат N проходит последовательность внутренних состояний $Q = (a_1^0, \ldots, a_s^0), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_s^n), \ldots$, где $(v_i, t_i^0 + n\pi, a_i^n) \in \overline{P}$ и для каждого $v, t \in P$ значение $a(v, t)$ может быть вычислено по Q и z за конечное число элементарных шагов (элементарным шагом считаем вычисление функции f_v, $v \in V_0$.

Утверждение 3. Семейство полных процессов R^* в конвейере $K(B)$ с сильно связным графом B моделируется прямым произведением $k(B)$ попарно тождественных автоматов $\mathrm{N}(B)$. При этом число состояний автомата $\mathrm{N}(B)$ не превосходит $\dfrac{|V_B|}{k(B)}$ и один шаг автомата $\mathrm{N}(B)$ может быть выполнен не более чем за $|V_B|$ элементарных шагов.

Рассмотрим теперь конвейер $K(B')$ с таким графом B', что после удаления вершин $V_{\text{входн}}(B')$ вместе с инцидентными им дугами остается сильно связный граф B.

Утверждение 4. Семейство полных процессов R^* в конвейере $K(B')$ моделируется прямым произведением $k(B)$ попарно тождественных автоматов $\mathrm{N}(B')$. При этом число состояний автомата $\mathrm{N}(B)$ не превосходит $\dfrac{|V_B|}{k(B)}$, один шаг автомата $\mathrm{N}(B)$ может быть выполнен не более чем за $|V_B|$ элементарных шагов, начальное состояние $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ автомата $\underbrace{\mathrm{N}(B') \times \cdots \times \mathrm{N}(B')}_{k(B)}$ может быть вычислено за число шагов, не превосходящее $k(B) \cdot |V_B|$.

Утверждение 5. Полный процесс $\overline{\overline{R}}$ в конвейере $K(B')$ стабилизируется для S_0 и Σ тогда и только тогда, когда автомат $\mathrm{N}(B')$ стабилизируется при начальных состояниях $w_1, w_2, \ldots, w_k$, при входном сигнале Σ и эти стабильные состояния совпадают.

Утверждение 6. Задача стабилизации для конвейера $K(B')$ может быть решена за число элементарных шагов, не превосходящее $O(k(B) \cdot |V_B| \cdot |A|^{\frac{|V_B|}{k(B)}})$.

Обозначим $\mu(K, S_0, \Sigma)$ число элементарных шагов, а $\nu(K, S_0, \Sigma)$ число шагов $K(G)$, достаточных для решения задачи стабилизации, при начальном состоянии S_0 и входном сигнале Σ. Очевидно, что

$$\mu(K, S_0, \Sigma) \leqslant |V_C| \cdot \nu(K, S_0, \Sigma)$$

Утверждение 7. Если G ациклический граф, то $K(G)$ стабилизируется при любом начальном состоянии S_0 и любой стабильной входной последовательности Σ, после $L(G)$ шагов автомата $K(G)$ и

$$\mu(K, S_0, \Sigma) \leqslant |V_G| \cdot L(G),$$

где $L(G)$ — длина наидлиннейшего пути в графе G.

Утверждение 8. Пусть G состоит из нескольких непустых бикомпонент $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Тогда $K(G)$ стабилизируется тогда и только тогда, когда стабилизируются подконвейеры $K(B_1), \ldots, K(B_r)$ и при этом

$$\mu(K, S_0, \Sigma) \leqslant \sum_{i=1}^{r} k(B_i) \cdot |V_{B_i}| \cdot |A|^{\frac{|V_{B_i}|}{n(B_i)}}.$$

Рассмотрим теперь конвейер $K(G)$ общего вида. Представим его в виде последовательного соединения двух подконвейеров K^1, K^2. Для этого разобьем V_G на два множества V^1, V^2 таким образом, чтобы в G не существовало дуги $(v, v') \in U_G$, где $v \in V^2$, $v' \in V^1$.

Обозначим:

$$V^3 = \{v/(v, v') \in U_G, \quad v \in V^1, \; v' \in V^2\}$$

G^1 — подграф G, натянутый на V^1

G^2 — подграф G, натянутый на $V^2 \cup V^3$

$$K^1 = K(G^1)$$

$$K^2 = K(G^2).$$

Для каждого состояния S конвейера $K(G)$ обозначим S^1, S^2 — соответствующие состояния K^1, K^2.

Для входной последовательности Σ конвейера $K(G)$ обозначим Σ_m — ее конечный отрезок длины m.

Положим $\nu_1 = \nu(K^1, S_0, \Sigma)$ и пусть $K(G)$ из состояния S_0 при входной последовательности Σ_{ν_1} переходит в состояние S_1.

Обозначим через σ^2 входной символ для K^2, который совпадает со значением Σ на входных вершинах, общих для K и K^2, и имеет значение $a(v, \nu_1)$ на $v \in V^3$.

Обозначим через Σ^2 входную последовательность, состоящую из повторения σ^2.

Σ^1 — входная последовательность, совпадающая с Σ на входах K^1.

Утверждение 9. $K(G)$ стабилизируется при S_0 и Σ тогда и только тогда, когда

1) K^1 стабилизируется при S_0^1, Σ^1.

2) K^2 стабилизируется при S_1^2, Σ^2

и при этом

$$\mu(K, S_0, \Sigma) \leqslant \nu_1 \cdot |V_G| + \nu_2 \cdot |V^2|.$$

Утверждение 10. Задача стабилизации конвейеров общего вида может быть решена за число шагов

$$\mu(K, S_0, \Sigma) < |V_G| \cdot L(G) + \sum_{i=1}^{r} k(B_i) \cdot |V_{B_i}| \cdot |A|^{\frac{|V_{B_i}|}{k(B_i)}},$$

где $L(G)$ — длина наидлиннейшего пути в фактор графа $B(G)$. $\{B_1, \ldots, B_r\}$ — множество всех непустых бикомпонент в графе G.

Институт проблем информатики и автоматизации
Национальной академии наук Армении

Կ. Վ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ, Ս. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Հարահոսի կայունության խնդրի լուծումը, հիմնված պրոցեսների դեկոմպոզիցիայի վրա

Այս աշխատանքը պարունակում է հարահոսի կայունության խնդրի լուծման մի ալգորիթմ, հիմնվում է պրոցեսների դեկոմպոզիցիայի վրա (տե՛ս (1), որը հնարավորություն է տալիս հասարակ ալգորիթմի $O(|A|^{|V_{\text{ներք}}|})$ *բարդության գնահատականի մեջ իջեցնել աստիճանացույցը։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *К. В. Шахбазян*, Кибернетика, № 6, с. 38—42, 1988.